

Untersuchungen zu
nichtklassischen
Hilberträumen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung
der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
Angela Fässler-Ullmann
aus Appenzell

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Gross

Zentralstelle der Studentenschaft
Zürich 1982



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41507225_0016

Untersuchungen zu
nichtklassischen
Hilberträumen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung
der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
Angela Fässler-Ullmann
aus Appenzell

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Gross

Zentralstelle der Studentenschaft
Zürich 1982



Meine Eltern

1. Einleitung	1
2. Die Eltern	2
3. Die Eltern	3
4. Die Eltern	4
5. Die Eltern	5
6. Die Eltern	6
7. Die Eltern	7
8. Die Eltern	8
9. Die Eltern	9
10. Die Eltern	10
11. Die Eltern	11
12. Die Eltern	12
13. Die Eltern	13
14. Die Eltern	14
15. Die Eltern	15
16. Die Eltern	16
17. Die Eltern	17
18. Die Eltern	18
19. Die Eltern	19
20. Die Eltern	20
21. Die Eltern	21
22. Die Eltern	22
23. Die Eltern	23
24. Die Eltern	24
25. Die Eltern	25
26. Die Eltern	26
27. Die Eltern	27
28. Die Eltern	28
29. Die Eltern	29
30. Die Eltern	30
31. Die Eltern	31
32. Die Eltern	32
33. Die Eltern	33
34. Die Eltern	34
35. Die Eltern	35
36. Die Eltern	36
37. Die Eltern	37
38. Die Eltern	38
39. Die Eltern	39
40. Die Eltern	40
41. Die Eltern	41
42. Die Eltern	42
43. Die Eltern	43
44. Die Eltern	44
45. Die Eltern	45
46. Die Eltern	46
47. Die Eltern	47
48. Die Eltern	48
49. Die Eltern	49
50. Die Eltern	50
51. Die Eltern	51
52. Die Eltern	52
53. Die Eltern	53
54. Die Eltern	54
55. Die Eltern	55
56. Die Eltern	56
57. Die Eltern	57
58. Die Eltern	58
59. Die Eltern	59
60. Die Eltern	60
61. Die Eltern	61
62. Die Eltern	62
63. Die Eltern	63
64. Die Eltern	64
65. Die Eltern	65
66. Die Eltern	66
67. Die Eltern	67
68. Die Eltern	68
69. Die Eltern	69
70. Die Eltern	70
71. Die Eltern	71
72. Die Eltern	72
73. Die Eltern	73
74. Die Eltern	74
75. Die Eltern	75
76. Die Eltern	76
77. Die Eltern	77
78. Die Eltern	78
79. Die Eltern	79
80. Die Eltern	80
81. Die Eltern	81
82. Die Eltern	82
83. Die Eltern	83
84. Die Eltern	84
85. Die Eltern	85
86. Die Eltern	86
87. Die Eltern	87
88. Die Eltern	88
89. Die Eltern	89
90. Die Eltern	90
91. Die Eltern	91
92. Die Eltern	92
93. Die Eltern	93
94. Die Eltern	94
95. Die Eltern	95
96. Die Eltern	96
97. Die Eltern	97
98. Die Eltern	98
99. Die Eltern	99
100. Die Eltern	100

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
<u>I. Bezeichnungen und Resultate</u>	3
I ₁ . Das Halbringprodukt	3
I ₂ . Die zugehörigen Körper	3
I ₃ . Die Räume	5
I ₄ . Die Cliffordalgebren $C(E)$	6
<u>II. Hilbsche Räume</u>	7
II ₁ . Eigenschaften von (E, Φ)	7
II ₂ . Ein Kriterium für $L_c \neq L_s$ (Satz 1, p. 14)	11
II ₃ . Der Typ eines Körperelements	17
II ₄ . Ein Kriterium für $L_c = L_s$ (Satz 2, p. 18)	18
II ₅ . Konstruktion von Beispielen (Zusammenfassung p. 38)	26
<u>III. Cliffordalgebren gewisse hilbsche Räume</u>	40
III ₁ . Cliffordalgebren und ihre Komplettierungen sind assoziative Schiefkörper bei gewissen hilbschen Räumen (Lemma 22, p. 45 ; Satz 3, p. 48)	40
III ₂ . Köthers Schiefkörper als Nebenprodukt (Korollar 1, p. 52)	52
III ₃ . Die Cliffordalgebren als Haarsche assoziierte Schiefkörper (Korollar 2, p. 55)	55
III ₄ . $\widehat{C(E)}$ ist hilbsch (Lemma 24, p. 57)	57
<u>IV. lineare Abbildungen auf hilbschen Räumen</u>	59
IV ₁ . Beschränkte lineare Abbildungen	59
IV ₂ . Zusammenhang zwischen stetigen und beschränkten Abbildungen (Satz 4, p. 61)	61
IV ₃ . Orthogonale Abbildungen (Satz 5, p. 78)	70
literatur	79

Einleitung

Ein nicht ausgeartet quadratischer Raum heißt Hilbertsch (vgl. [16, p. 177]), falls für alle Teilräume $X \subseteq E$ gilt

$$X = X^{\perp\perp} \rightarrow E = X \oplus X^{\perp}$$

mit anderen Worten: aus orthogonal abgeschlossene Teilräume X lässt sich lng $X^{\perp}$ projizieren.

Endlichdimensionale E sind genau dann Hilbertsch, wenn sie anisotrop sind. Schwierig ist die Existenzfrage bei unendlich Dimensionen.

Das erste, von den klassischen Hilberträumen (ber $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) verschiedene Beispiel (vgl. [7]) wurde von H.A. Kille 1979 entdeckt. Es handelt sich um einen positiv definiten quadratischen Raum über einem nicht endlichdimensional angeordneten Körper, versehen mit einer untriviale, vollständigen Normtopologie.

Im Sommer 1979 wurde Killes Konstruktion im Seminar fortgesetzt und die Idee genommen. Die Vermutung, dass sich die Konstruktion über bewerteten Körper statt angeordneten, abzählbaren lassen sollte, bestätigte sich: Im Herbst 1979 berichtete Gross über sein erstes Beispiel über bewerteten statt angeordneten Körper (siehe [9, p. 24]). Dieses Beispiel findet sich auch in [6, p. 257].

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile:

Im ersten Teil (Kapitel II) werden die genannten Beispiele von Hilbertschen Räumen über bewerteten Körper zu einer systematischen Theorie ausgebaut (vgl. Zusammenfassung p. 38).

Im zweiten Teil (Kapitel III) wird gezeigt, dass die Cliffordalgebren gewisse Hilbertsche Räume Schiefkörper sind (für klassische Hilberträume trifft das nicht zu). Man gewinnt

dadurch eine ganze Klasse von Schiefkörpern, die unendlichdimensional sind über dem Zentrum, bzw. erhält man eine ganze Klasse Noether'scher aufgehobener Schiefkörper aus einer von Hodeland [6, p. 249]. Durch Komplettierung erhält man schließlich neueartige Hilbertsche Räume, welche vollständige normierte Algebren bilden.

Im dritten Teil (Kapitel IV) wird die Untersuchung der topologischen Algebra $\mathfrak{A}$ der beschränkten linearen Abbildungen in unendlichdimensionalen Hilbertschen Räumen begonnen. (Solche Abbildungen sind im allgemeinen nicht beschränkt). Es wird auch gezeigt, dass die orthogonale Gruppe jenseits solcher Räume (bei der um $\mathfrak{A}$ gelegenen Topologie) nicht lokal kompakt ist.

I. Bezeichnungen und Resultate

I₁. Das Hahnprodukt

Eine (total) geordnete abelsche Gruppe $(\Gamma, \leq)$ ist eine abelsche Gruppe Γ mit einer totalen Ordnungsrelation $\leq$ so, dass gilt

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Als Beispiel hat man das Hahnprodukt $\prod_{i \in I} G_i$, wo I eine total geordnete Menge und für jedes $i \in I$ G_i eine geordnete Gruppe ist. Für $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$ sei der Träger definiert durch:

$$\text{supp } (\alpha) = \{i \in I \mid \alpha_i \neq 0\}$$

Sei $\prod_{i \in I} G_i = \{ \alpha \in \prod_{i \in I} G_i \mid \text{supp } (\alpha) \text{ ist wohlgeordnet} \}$. $\prod_{i \in I} G_i$ ist eine Untergruppe von $\prod_{i \in I} G_i$, die geordnet wird durch:

$$\alpha < \beta \text{ in } \prod_{i \in I} G_i \Leftrightarrow (\text{für } i_0 = \min \text{supp } (\beta - \alpha) \text{ ist } \alpha_{i_0} < \beta_{i_0})$$

Für eine beliebige geordnete Gruppe Γ gilt (vgl. [13, p 22, Theorem 2]) Γ ist Untergruppe eines Hahnproduktes $\prod_{i \in I} R_i$ von Untergruppen von $\mathbb{R}$ (mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Ordnung). Dabei kann man annehmen, dass für jedes $i \in I$ die Abbildung $\varphi_i: \Gamma \rightarrow R_i$ mit $\varphi_i((\gamma_j)_{j \in I}) = \gamma_i$ surjektiv ist.

Eine beliebige Untergruppe G von $\mathbb{R}$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert $c \in G$ mit $a < c < b$.

Dies werden im folgenden immer $|\Gamma/2\Gamma| \geq \aleph_0$ benötigen. Es lassen sich viele Beispiele angeben ohne dass man Faktoren G_i isomorph zu $\mathbb{Z}$ wählen müsste.

Eine weitere Generalisierbarkeit über die von uns zugelassenen Γ wird auf Seite 33 formuliert.

I₂. Die zugelassenen Körper

Sei k ein kommutativer Körper, Γ eine geordnete abelsche Gruppe

zu der ein weiteres Element, mit ∞ bezeichnet, hinzugefügt wird

$$\text{Es sei } y < \infty \quad \forall y \in \Gamma, \quad y + \infty = \infty + y = \infty + \infty = \infty \quad \forall y \in \Gamma$$

Weiter sei $v: L \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Abbildung mit

$$v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$$

$$v(xy) = v(x) + v(y) \quad \forall x, y$$

$$v(x+y) \geq \min \{v(x), v(y)\} \quad \forall x, y$$

(L, v, Γ) heißt dann bewerteter Körper, v heißt Bewertung.

$A_v = \{x \in L \mid v(x) \geq 0\}$ heißt Bewertungsring von v , $M_v = \{x \in L \mid v(x) > 0\}$

Ideal der Bewertung v und $K_v = A_v / M_v$ Restklassenkörper der Bewertung v . (vgl. [13, p. 27])

Mit dem System $(V_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, wo $V_\gamma = \{x \in L \mid v(x) > \gamma\}$, als Nullumgebungsbasis wird L zu einem topologischen Körper. Dagegen existiert ein Oberkörper $\tilde{L}$, eine Bewertung $\tilde{v}: \tilde{L} \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ so, dass L dicht ist in $\tilde{L}$, $\tilde{L}$ vollständig, $\tilde{v}$ setzt v fort und $\tilde{v}(\tilde{L}) = v(L)$. $\tilde{L}$ heißt Vervollständigung von L . (vgl. [13, p. 65])

In dieser Arbeit gilt immer:

(1) (L, v, Γ) ist ein bewerteter Körper, vollständig, der den ersten Abzählbarbarkeitsaxiom erfüllt (Satz A₁)

Es gelten dann folgende leicht zu beweisende Eigenschaften (bei uns ist immer $0 \notin N$).

(2) Sei $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$

$(\sum_{i=1}^n \lambda_i)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent $\Leftrightarrow (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

(3) $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in L mit $\lambda = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \neq 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v(\lambda_i) = v(\lambda_{n_0}) = v(\lambda) \quad \forall i > n_0$$

(4) Zu einer gegebenen geordneten abelschen Gruppe Γ , einem kommutativen Körper K_0 betrachtet man die Menge $K_0[X]^\Gamma$

der vollgemeinerten Polynome über k_0 mit Exponenten in $\Gamma_+ = \{y \in \Gamma \mid y \geq 0\}$ und $k_0(X)^{\Gamma_+}$ den Quotientenkörper von $k_0[X]^{\Gamma_+}$.

Durch die Abbildung $v: k_0(X)^{\Gamma_+} \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ mit

$$v(0) = \infty$$

$$v(s) = j_0, \quad \text{wobei } s = a_{j_0} X^{j_0} + a_{j_1} X^{j_1} + \dots + a_{j_n} X^{j_n} \in k_0[X]^{\Gamma_+} \text{ mit } a_{j_0} \neq 0$$

$$\text{und } 0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_n$$

$$v\left(\frac{s}{t}\right) = v(s) - v(t) \quad \text{für } \frac{s}{t} \in k_0(X)^{\Gamma_+}$$

und eine Bewertung definiert mit $v(k_0(X)^{\Gamma_+}) = \Gamma \cup \{\infty\}$ und Restklassenkörper k_0 . (vgl. [13, p.31, Proposition 1])

Ein kommutativer Körper k heißt formal reell, wenn gilt: -1 lässt sich nicht als Summe von Quadratzahlen darstellen. Ist der Stufe $s(k)$ eines nicht formal reellen kommutativen Körpers k verstanden man die kleinste natürliche Zahl r mit der Eigenschaft -1 lässt sich darstellen als Summe von r Quadratzahlen.

Ein (eventuell nicht kommutativ) Körper k heißt ein $*$ -Körper, falls eine bijektive Abbildung $*: k \rightarrow k$ existiert mit

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad (x^*)^* = x$$

Ein $*$ -Körper heißt Baer'sch angeordnet, falls eine Menge $P \subset \{x \in k \mid x^* = x\}$ existiert mit

$$1 \in P, \quad 0 \notin P, \quad P + P \subset P, \quad xPx^* \subset P \quad \forall x \neq 0 \text{ in } k, \quad \text{für jedes } x \neq 0 \text{ mit } x^* = x \text{ gilt: } x \in P \text{ oder } (-x) \in P$$

Für einen kommutativen Körper k und $*$ - k erhält man so den Begriff einer Sequenzierung auf k (vgl. [6], [11]).

I₃. Die Räume

Ein bilinearer Raum (E, Φ) über k ist ein k -Vektorraum E zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $\Phi: E \times E \rightarrow k$. Falls über $k \neq 2$ sprechen wir auch – wie üblich – von quadratischen

Räumen. Für Teilräume $F \subseteq E$ ist $F^\perp = \{x \in E \mid \phi(x, y) = 0 \ \forall y \in F\}$. (E, ϕ)

heißt nicht ausgeartet, wenn gilt $E^\perp = \{0\}$

Seien (E, ϕ) und (F, ψ) zwei bilinare Räume über K $f: E \rightarrow F$

heißt eine Isometrie, falls gilt f ist ein Vektorraumisomorphismus und $\phi(x, y) = \psi(fx, fy) \ \forall x, y \in E$

' $x \perp y$ ' bedeutet: $\phi(x, y) = 0$

In dieser Arbeit sei immer

(5) (E, ϕ) ein nicht ausgearteter bilinear Raum über einem reellen oder komplexen Körper K , der (1) erfüllt. Weiter gelte die folgende Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (bewz. C.S.)

$$2v(\phi(x, y)) \geq v(\phi(x, x)) + v(\phi(y, y)) \quad \forall x, y \in E$$

Solche Räume werden zu topologischen ("normierten") Vektorräumen mit der Nullumgebungsbase $(U_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$, wo $U_\gamma = \{x \in E \mid v(\phi(x, x)) > \gamma\}$

Es existiert also ein $\tilde{E}$ auf homomorph eindeutig bestimmter Abzählraum $\tilde{E}$ so, dass E dicht liegt in $\tilde{E}$ und $\tilde{E}$ vollständig (vgl. [15, §169], vgl. auch Lemma 4 in II₁)

Weiter gelten

(6) $\phi: E \times E \rightarrow K$ ist stetig

(7) ϕ ist alternierend

(8) $(\sum_{i=1}^n x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Leftrightarrow (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

Folgende Bezeichnungen sind üblich $L_c = \{F \subseteq E \mid F \text{ Teilraum von } E \text{ und } F = \bar{F} \text{ (d.h. } F \text{ abgeschlossen)}\}$, $L_u = \{F \subseteq E \mid F \text{ Teilraum von } E \text{ und } F = F^{\perp\perp}\}$, $L_s = \{F \subseteq E \mid F \text{ Teilraum von } E \text{ und } E = F \oplus F^\perp\}$. Dabei ist

(9) $L_s \subset L_u \subset L_c$

1.4. Die Cliffordalgebra $C(E)$

Für einen bilinearen Raum (E, ϕ) sei $C(E)$ die Cliffordalgebra

(vgl. [1, § 9]). Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Familie in E mit total geordnete Indexmenge I und $S = \{e_1, \dots, e_n\} \subset I$ mit $S \neq \emptyset$, $e_1 < e_2 < \dots < e_n$.

$$e_S := e_{e_1} \dots e_{e_n}, \quad e_\emptyset := 1_{C(E)}$$

Für $R, S \subset I$ mit $|R|, |S| < \infty$ sei $R+S := (R \cup S) \setminus (R \cap S)$

II. Hilbertsche Räume

II₁. Eigenschaften von (E, Φ)

Sei (E, Φ) ein bilinear Raum, der (S) aus I₃ erfüllt. Dann gilt:

Lemma 1 Sei $x_1, \dots, x_n \in E \setminus \{0\}$, $x_i \perp x_j$ für $i \neq j$. Dann ist

$$v\left(\sum_{i=1}^n \Phi(x_i, x_i)\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\Phi(x_i, x_i))\}$$

Beweis:

" $\sup$ ": klar

" $\leq$ ": Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

$$\Rightarrow 2v(\Phi(x_i, x_i)) = 2v\left(\Phi\left(\sum_{j=1}^n x_j, x_i\right)\right) \geq v\left(\Phi\left(\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n x_j\right)\right) + v(\Phi(x_i, x_i))$$

$$\Rightarrow v(\Phi(x_i, x_i)) \geq v\left(\sum_{j=1}^n \Phi(x_j, x_j)\right)$$

Definiere $N: E \rightarrow \Gamma$ mit $N(x) := v(\Phi(x, x))$. Für diese Abbildung gilt:

Lemma 2 i) $N(x+y) \geq \min\{N(x), N(y)\} \quad \forall x, y \in E$

ii) $N(x) \neq N(y) \Rightarrow N(x+y) = \min\{N(x), N(y)\}$

Beweis:

$$i): v(\Phi(x+y, x+y)) = v(\Phi(x, x) + \Phi(y, y) + 2\Phi(x, y)) \geq \min\{N(x), N(y), v(2) + v(\Phi(x, y))\}$$

$$\text{Wegen } 2v(\Phi(x, y)) \geq N(x) + N(y) \geq 2 \min\{N(x), N(y)\} \text{ ist}$$

$$v(2) + v(\Phi(x, y)) \geq v(\Phi(x, y)) \geq \min\{N(x), N(y)\}, \text{ also ist i) erfüllt.}$$

$$ii): \text{ oBdA } N(x) < N(y) \quad \underline{\text{Annahme}}: v(\Phi(x, x) + \Phi(y, y)) = v(2\Phi(x, y))$$

$$\Rightarrow v(2) + v(\phi(x, y)) = \min \{N(x), N(y)\} = N(x) \quad , \quad \text{da} \quad N(x) + N(y)$$

$$\text{Mit } C5 \text{ folgt} \quad 2v(2) + 2v(\phi(x, y)) = 2N(x) \geq 2v(2) + N(x) + N(y) \geq N(x) + N(y)$$

$$\Rightarrow N(x) \geq N(y) \quad , \quad \text{Widerspruch}$$

$$\text{Also: } N(x, y) = \min \{v(\phi(x, x) + \phi(y, y)), v(2\phi(x, y))\} = \min \{N(x), N(y)\} \quad , \quad \text{da} \\ v(2\phi(x, y)) \geq \min \{N(x), N(y)\}$$

$$\text{Mit Induktion kann man zeigen, dass } N(x_1 + \dots + x_n) \geq \min_{i=1, \dots, n} \{N(x_i)\} \quad \forall n \geq 1$$

Lemma 3 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E . Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht Nullfolge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n) = N(x_{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$.

Beweis

$$\exists \delta \in \Gamma \text{ so, dass } \forall n \in \mathbb{N} \exists m \geq n \text{ mit } N(x_m) \leq \delta \quad \text{und} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit} \\ N(x_n - x_m) > \delta \quad \forall n, m \geq n_0. \text{ Wähle } n_0 \geq n_0 \text{ mit } N(x_{n_0}) \leq \delta.$$

$$\text{Annahme: } \exists i > n_0 \text{ mit } N(x_i) + N(x_{n_0})$$

$$\Rightarrow N(x_i - x_{n_0}) = \min \{N(x_i), N(x_{n_0})\} > \delta \quad , \quad \text{also } N(x_{n_0}) > \delta. \quad \text{Widerspruch}$$

In folgendem werden vor allem vollständige Räume (E, ϕ) betrachtet. Es wird ebenfalls im nächsten Lemma gezeigt, dass man einen gegebenen Raum (E, ϕ) da (5) erfüllt immer in einen vollständigen mit diesem Eigenschaften versehen kann.

Lemma 4 Sei (E, ϕ) ein linearer Raum da (5) aus I_2 erfüllt, $\tilde{E}$ die Komplettierung. Dann kann man ϕ zu $\tilde{\phi}$ auf $\tilde{E}$ fortsetzen so, dass $\tilde{\phi}$ assoziativ ist und C.5. erfüllt. Die Topologie der Komplettierung stimmt überein mit jener, die durch $(v, \tilde{\phi})$ auf $\tilde{E}$ gegeben wird.

Beweis

1. Zeile: Für $x = \lim x_n, y = \lim y_n \in \tilde{E}$ mit $x_n, y_n \in E \quad \forall n, x, y \neq 0$ gilt:
 $(\phi(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in E

Sei $f \in \Gamma$ beliebig

$x, y \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n) = N(x_{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$ und $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(y_m) = N(y_{m_0}) \quad \forall m \geq m_0$ oder Lemma 3

$$\tilde{n} := \max \{n_0, m_0\}$$

Weiter existiert $n_f \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n - x_m) > 2f - N(x_{\tilde{n}}) \quad \forall n, m \geq n_f$ und $N(y_n - y_m) > 2f - N(y_{\tilde{n}}) \quad \forall n, m \geq n_f$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2v(\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_m, y_m)) &= 2v(\Phi(x_n, y_n - y_m) - \Phi(x_m - x_n, y_m)) \\ &\geq \min \{2v(\Phi(x_n, y_n - y_m)), 2v(\Phi(x_m - x_n, y_m))\} \\ &\geq \min \{N(x_n) + N(y_n - y_m), N(x_m - x_n) + N(y_m)\} \end{aligned}$$

Also gilt für $n, m \geq \max \{\tilde{n}, n_f\}$

$$2v(\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_m, y_m)) \geq \min \{N(x_{\tilde{n}}) + N(y_n - y_m), N(x_m - x_n) + N(y_{\tilde{n}})\} > 2f$$

$$\Rightarrow v(\Phi(x_n, y_n) - \Phi(x_m, y_m)) > f \quad \forall n, m \geq \max \{\tilde{n}, n_f\}$$

Deshalb gilt: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\Rightarrow (\Phi(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\forall y = \lim y_n \in \tilde{E}$,
 $y_n \in E$

2. Definiere $\tilde{\Phi}(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, y_n)$ für $x = \lim x_n, y = \lim y_n \in \tilde{E}$ mit $x_n, y_n \in E$

zu zeigen bleibt: a) $\tilde{\Phi}$ wohldefiniert

b) $\tilde{\Phi}$ symmetrisch, bilinear, Fortsetzung von Φ

c) $\tilde{\Phi}$ assoziativ

d) $\tilde{\Phi}$ erfüllt C.S.

a) Sei $x = \lim x_n = \lim u_n$ mit $x_n, u_n \in E \quad \forall n$ und $y = \lim y_n = \lim v_n$ mit $y_n, v_n \in E \quad \forall n$. oBdA $x \neq 0, y \neq 0$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } N(x_n) = N(x_{n_0}), N(v_n) = N(v_{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$$

$$f_0 := \min \{N(v_{n_0}), N(x_{n_0})\}$$

$$\text{Zeige: } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n, v_n)$$

Sei $f \in \Gamma$. Dann existiert $n_f \geq n_0$ mit $N(x_n - u_n) > 2f - f_0 \quad \forall n \geq n_f$ und $N(y_n - v_n) > 2f - f_0 \quad \forall n \geq n_f$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2v(\Phi(x_n, y_n) - \Phi(u_n, v_n)) &= 2v(\Phi(x_n, y_n - v_n) + \Phi(x_n - u_n, v_n)) \\ &\geq \min \{N(x_n) + N(y_n - v_n), N(x_n - u_n) + N(v_n)\} \end{aligned}$$

$$> \min \{N(x_{n_0}) + 2\delta - \gamma_0, N(y_{n_0}) + 2\delta - \gamma_0\} > 2\delta \quad \forall n \geq n_\gamma$$

$$\Rightarrow v(\phi(x_n, y_n) - \phi(u_n, v_n)) > \delta \quad \forall n \geq n_\gamma$$

b) $\tilde{\phi}$ symmetrisch, bilinear usw., da ϕ diese Eigenschaften hat
 $\tilde{\phi}|_{E \times E} = \phi$, da für $x \in E$ gilt $x = \lim x_n$ mit $x_n = x \quad \forall n$

c) $\tilde{\phi}$ unischor: Sei $x \neq 0$ in $\tilde{E}$, also $x = \lim x_n$, $x_n \in E \quad \forall n$ und es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n) = N(x_{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow (\phi(x_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge, also } \tilde{\phi}(x, x) = 0$$

d) $\tilde{\phi}$ erfüllt C.S.: Seien $x, y \in \tilde{E}$, $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ mit $x_n, y_n \in E$ oder $x, y \neq 0$, $x \neq y$ (sonst C.S. trivial erfüllt)

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } 2v(\phi(x_n, y_n)) \geq N(x_n) + N(y_n) = N(x_{n_0}) + N(y_{n_0}) \quad \forall n \geq n_0 \text{ und}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ mit } 2v(\tilde{\phi}(x, y)) = 2v(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n, y_n)) = 2v(\phi(x_n, y_n)) = 2v(\phi(x_n, y_{n_1}))$$

$$\forall n \geq n_1$$

$$\tilde{\phi} \text{ unischor} \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ mit } v(\tilde{\phi}(x, x)) = v(\phi(x_n, x_n)) = v(\phi(x_{n_2}, x_{n_2})) \quad \forall n \geq n_2$$

$$\text{und } v(\tilde{\phi}(y, y)) = v(\phi(y_n, y_n)) = v(\phi(y_{n_2}, y_{n_2})) \quad \forall n \geq n_2$$

$$m_0 := \max\{n_0, n_1, n_2\}$$

$$\Rightarrow 2v(\tilde{\phi}(x, y)) = 2v(\phi(x_{m_0}, y_{m_0})) \geq N(x_{m_0}) + N(y_{m_0}) = v(\tilde{\phi}(x, x)) + v(\tilde{\phi}(y, y))$$

Bemerkung: Für $\tilde{N}(x) := v(\tilde{\phi}(x, x))$ mit $x \in \tilde{E}$ gilt also wieder:

$$x \neq 0 \text{ in } \tilde{E} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } \tilde{N}(x) = N(x_{n_0}) \quad (\text{wo } x = \lim x_n)$$

Es bleibt noch zu zeigen

Da Topologie der Kompletthierung stimmt überein mit der durch $(v, \tilde{\phi})$ gegebenen Topologie auf $\tilde{E}$

Sei $\tilde{\tau}$ die Topologie der Kompletthierung, $\tilde{\tau}$ genau, die durch $(v, \tilde{\phi})$ gegeben wird. Es ist also $\tilde{E} = \hat{E}/N$ wo $\hat{E} = \{\text{Cauchyfolgen auf } E\}$, $N = \{\text{Nullfolgen auf } E\}$. Eine Nullumgebungsbasis für $\tilde{E}$ erhält man durch die Mengen $\tilde{U}_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$), die wir jetzt definieren:

$$\tilde{U}_\gamma = \overline{\pi}_0(\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{E} \mid \exists n_\gamma \in \mathbb{N} \text{ mit } N(x_n) > \gamma \quad \forall n \geq n_\gamma\}) \quad \text{wo}$$

$\pi_0: \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}/N$ die kanonische Projektion ist. (vgl. [15, § 166]).

Für $\tilde{E}$ erhält man eine Nullumgebungsbasis durch die Mengen $\tilde{U}_\mu$ (für $\mu \in \Gamma$): $\tilde{U}_\mu = \{x \in \tilde{E} \mid \tilde{N}(x) > \mu\}$

Zeig: $\forall \mu \in \Gamma$ gilt $\tilde{U}_\mu = \tilde{U}_\mu$

Sei $\mu \in \Gamma$

"a": Sei $x \in \tilde{U}_\mu$. 1. Fall: $x=0 \rightarrow x \in \tilde{U}_\mu$

2. Fall: $x \neq 0 \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N}(x) = N(x_n) = N(x_{n_0}) \forall n \geq n_0$ so

$x = \lim x_n$ mit $x_n \in E \forall n$.

x lässt sich also auch schreiben als $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + N = \pi_0((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$
und es gilt also wegen $\tilde{N}(x) > \mu: N(x_n) > \mu \forall n \geq n_0$, also $x \in \tilde{U}_\mu$.

"c": Sei $x \in \tilde{U}_\mu$, also $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + N$ und es existiert n_μ mit $N(x_n) > \mu$
 $\forall n \geq n_\mu$. 1. Fall: $x=0 \rightarrow x \in \tilde{U}_\mu$

2. Fall: $x \neq 0 \rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N}(x) = N(x_n) = N(x_{n_0}) \forall n \geq n_0$

Sei $\bar{n}_\mu := \max\{n_0, n_\mu\} \rightarrow \tilde{N}(x) > \mu \forall n \geq \bar{n}_\mu$, also $x \in \tilde{U}_\mu$.

II₂ Ein Kriterium für $L_c + L_s$

Sei wieder (E, Φ) ein bilinear Raum sei in $I_s(S)$. Die folgende Definition sowie Lemma 5 und Lemma 6 sind Überlegungen aus der Theorie der linearen Hilberträume (vgl. [5, p. 89])

Definition Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen in E heißt summierbar zu $x \in E$, wenn es zu jedem $\mu \in \Gamma$ eine endliche Teilmenge J_μ von I gibt so, dass für alle endlichen J mit $J_\mu \subset J \subset I$ gilt $N(x - \sum_{i \in J} x_i) > \mu$.

Lemma 5 $(x_i)_{i \in I}$ summierbar zu $x \rightarrow x$ eindeutig bestimmt

Lemma 6 Sei E vollständig. Dann gilt:

- i) Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in E ist genau dann summierbar, wenn es $\forall \gamma \in \Gamma$ ein endliches J_γ gibt, so dass $N(\sum_{i \in J} x_i) > \gamma \quad \forall J$ mit $J \cap J_\gamma = \emptyset$, J endlich.
- ii) $(x_i)_{i \in I}$ ist summierbar zu x genau dann, wenn höchstens abzählbar viele $x_i \neq 0$ sind und wenn für jede Abbildung $x_1, x_2, \dots$ die x_i gilt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n x_i)$

Bemerkung: Die Vollständigkeit von E wird nur für i) "⇐" gebraucht

Beweis: (siehe [5])

i) "⇒": Sei $(x_i)_{i \in I}$ zu x summierbar. Sei $\gamma \in \Gamma$

⇒ ∃ J_γ endlich, $J_\gamma \subset I$ mit $N(x - \sum_{i \in J_\gamma} x_i) > \gamma$ für alle endlichen J mit $J \subset J \subset I$

Sei $J \subset I$ endlich mit $J \cap J_\gamma = \emptyset$

⇒ $N(\sum_{i \in J} x_i) = N(\sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J_\gamma} x_i - \sum_{i \in J_\gamma} x_i + x - x) \geq \min \{ N(\sum_{i \in J \cup J_\gamma} x_i - x), N(x - \sum_{i \in J_\gamma} x_i) \}$

⇒ $N(\sum_{i \in J} x_i) > \gamma$

"⇐": Die Topologie auf E erfüllt A_1 , also existiert eine Folge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ mit der Eigenschaft: $\forall \gamma \in \Gamma \exists n_\gamma$ so, dass $\varepsilon_n > \gamma \quad \forall n \geq n_\gamma$ obdA $\varepsilon_n > 0 \quad \forall n$

Wähle $J_n \subset I$ so, dass gilt: J_n endlich und $\forall J \subset I$ endlich mit $J \cap J_n = \emptyset$ ist $N(\sum_{i \in J} x_i) > \varepsilon_n$

Zeige: für $y_n := \sum_{i \in J_n \cup J_{n-1} \cup \dots \cup J_1} x_i$ gilt $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in E

Sei $\gamma \in \Gamma$, $n_\gamma \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_n > \gamma \quad \forall n \geq n_\gamma$. Seien $m, n \geq n_\gamma$, obdA $m > n$

⇒ $N(y_m - y_n) = N(\sum_{i \in J_n \cup \dots \cup J_m} x_i - \sum_{i \in J_n \cup \dots \cup J_m} x_i) = N(\sum_{i \in J_n} x_i) > \gamma$

$$J = (J_n \cup \dots \cup J_m) \setminus (J_n \cup \dots \cup J_n)$$

⇒ $J \cap J_n = \emptyset$, also $N(y_m - y_n) > \varepsilon_n > \gamma$ für $m, n \geq n_\gamma$

E vollständig $\Rightarrow \exists x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ in E

Zeige $x = \sum_{l \in I} x_l$

Sei $j \in \Gamma$. $\Rightarrow \exists n_j' \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall n \geq n_j'$ $N(x - y_n) > j$ und $\exists n_j'' \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_n > j \quad \forall n \geq n_j''$

$$n_j := \max \{n_j', n_j''\}, \quad J_j := J_1 \cup \dots \cup J_{n_j}$$

$\forall J$ endlich mit $J_j \subset J \subset I$ gilt dann:

$$N(x - \sum_{l \in J} x_l) = N(x - \sum_{l \in J_j} x_l - \sum_{l \in J \setminus J_j} x_l) \geq \min \{ N(x - \sum_{l \in J_j} x_l), N(\sum_{l \in J \setminus J_j} x_l) \}$$

E ist also $\sum_{l \in J_j} x_l = y_{n_j}$, also $N(x - \sum_{l \in J_j} x_l) > j$ und $(J \setminus J_j) \cap J_{n_j} = \emptyset$,

$$\text{also } N(\sum_{l \in J \setminus J_j} x_l) > \varepsilon_{n_j} > j$$

$$\Rightarrow N(x - \sum_{l \in J} x_l) > j$$

ii) " $\Rightarrow$ ": Sei $(x_l)_{l \in I}$ summierbar zu x , J_n sei wie i) " $\Leftarrow$ ".

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ ist abzählbar

Sei $l \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Dann gilt $\{l\} \cap J_n = \emptyset \quad \forall n$, also $N(x_l) > \varepsilon_n \quad \forall n$

$$\Rightarrow x_l = 0$$

Also existieren höchstens abzählbar viele $x_l \neq 0$. Sei $x_1, x_2, \dots$ eine Aufzählung dieser x_l . Sei $j \in \Gamma$, also $j \geq N(x)$

$\Rightarrow \exists J_j$ endlich mit $N(x - \sum_{l \in J_j} x_l) > j \quad \forall J$ endlich mit $J_j \subset J \subset I$

$$\text{also } x_l \neq 0 \quad \forall l \in J_j$$

$\exists n_j \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \dots, n_j\} \supset J_j$

$\Rightarrow \forall n \geq n_j$ gilt $N(x - \sum_{l \in \{1, \dots, n\}} x_l) > j$, also ist $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{l=1}^n x_l)$

" $\Leftarrow$ " also

Bemerkung Abstr. Überlagerungen geben insbesondere für $E = \mathcal{L}$ als Vektorraum über sich aufgefassen mit $\Phi: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ definiert durch $\Phi(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \mu$ (Φ ist symmetrisch, bilinear und erfüllt C1.). Dabei ist $N(\lambda) = 2v(\lambda)$ für $\lambda \in \mathcal{L}$, also die Topologie, die durch (v, Φ) gegeben wird stimmt mit jener, die durch v bestimmt wird.

Für die weiteren Rechnungen wird folgendes Lemma immer wieder gebraucht

Lemma 7 Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine orthogonale Familie in E , $E_0 = \text{lin}(e_i)_{i \in I}$
Dann gilt für $x \in \bar{E}_0$ $x = \sum_I \frac{\phi(x, e_i)}{\phi(e_i, e_i)} e_i$

Beweis

Sei $x \in \bar{E}_0$, $f_i = \frac{\phi(x, e_i)}{\phi(e_i, e_i)}$, $x_i = f_i e_i$, $\alpha_i = \phi(e_i, e_i)$

Zeige: $(x_i)_{i \in I}$ ist summierbar zu x

Sei $J \in \Gamma$. Dann existiert $y \in U_J$ mit $x+y \in E_0$, also

$x+y = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$, J_J endlich. Setze $z = x+y$. Für J endlich mit $J_J \subset J \subset I$ gilt:

$$N(x - \sum_{i \in J} x_i) = N(x - z + z - \sum_{i \in J} x_i) \geq \min \{ N(x-z), N(z - \sum_{i \in J} x_i) \}$$

Dabei ist $N(x-z) = N(y) > \delta$ und

$$N(z - \sum_{i \in J} x_i) = N(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i - \sum_{i \in J} f_i e_i)$$

$$= N(\sum_{i \in J} (\lambda_i - f_i) e_i) \quad \text{so } \lambda_i = 0 \text{ für } i \in J \setminus J_J$$

$$= \min_{i \in J} \{ v((f_i - \lambda_i)^2 \alpha_i) \} \quad \text{nach Lemma 1}$$

$$v((f_i - \lambda_i)^2 \alpha_i) = v\left(\frac{\phi(x-z, e_i)^2}{\alpha_i}\right) = 2v(\phi(x-z, e_i)) - v(\alpha_i) \geq N(x-z) \quad \forall i \in J$$

$$\Rightarrow N(z - \sum_{i \in J} x_i) \geq N(x-z) > \delta$$

$$\Rightarrow N(x - \sum_{i \in J} x_i) > \delta$$

Der folgende Satz gibt eine wichtige notwendige Bedingung an für die Gleichheit von $L_{\perp}$ und L_c

Satz 1 Sei $(e_i)_{i \in \alpha}$ eine orthogonale Familie in E , $\delta, \beta \in \Gamma$
(Gross / Klein) mit $\delta \in N(e_i) \leq \beta \forall i$. Dann ist $L_{\perp} \neq L_c$.

Beweis: (vgl. [3, Theorem 10])

Wir geben hier einen leicht abgewandelten Beweis nach Morris:
 $(e_i)_{i \in I}$ ist enthalten in einer maximalen orthogonalen Familie
 $(e_i)_{i \in I}$ in E für ein geeignetes I

Sei $F := \mathcal{L}(e_i)_{i \in I}$. Dann ist $F^\perp = \{0\}$

Annahme: $L_H = L_C$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \bar{F} &= \bar{F}^\perp \\ \text{aber } F^\perp &\subset \bar{F}^\perp \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \bar{F}$$

Lemma 7 $\Rightarrow$ für jedes $x \in E$ gilt $x = \sum_I \frac{\phi(x, e_i)}{\phi(e_i, e_i)} e_i$

Setze $f_i := \frac{\phi(x, e_i)}{\phi(e_i, e_i)}$, $\alpha_i := \phi(e_i, e_i)$ $\forall i \in I$

obdA $N(e_i) \leq 0$ $\forall i \in I$, dann: $N(e_i) > 0$, setze $\bar{e}_i := N(\alpha_i^{-1} e_i)$, somit $\bar{e}_i := e_i$

Für $i \in \mathbb{N}$ gilt dann $0 \leq N(e_i) \leq 0$ mit $0 := \min \{0, -1\}$

Beh: $x \in E \Rightarrow$ existiert $\sum_I f_i$

(vgl. Bemerkung zu Lemma 6)

$x \in E \Rightarrow$ existiert $\sum_I f_i e_i$ nach Lemma 7

Sei $y \in \Gamma$. Dann existiert J_0 mit $N(\sum_{i \in J} f_i e_i) > y$ $\forall J$ endlich mit
 $J \cap J_0 = \emptyset$ (vgl. Lemma 6. Im Beweis zu i) " $\Rightarrow$ " wurde nicht verwendet, dass E vollständig ist.)

$\Rightarrow \min_{i \in J} \{v(f_i^2 \alpha_i)\} > y$ nach Lemma 1

$\Rightarrow v(f_i^2 \alpha_i) > y$ $\forall i \in J$

$\Rightarrow 2v(f_i) > y - N(e_i) \geq y$ $\forall i \in J$, da $N(e_i) \leq 0$.

Also $2v(\sum_{i \in J} f_i) \geq \min_{i \in J} \{2v(f_i)\} > y$ $\forall J$ endlich mit $J \cap J_0 = \emptyset$

Da $\mathcal{L}$ vollständig ist folgt also mit Lemma 6 die Existenz von $\sum_I f_i$.

Definiere $\mathcal{L}: E \rightarrow \mathcal{L}$ durch $x \mapsto \sum_I f_i$

Zeige: $\mathcal{L}$ ist linear und stetig

Linearität ist klar, betrachten wir die Stetigkeit: Sei $y \in \Gamma$ beliebig

Wähle $\delta := 2\delta'$, $x \in U_\delta$

1. Fall: $\ell(x) = 0 \Rightarrow v(\ell(x)) > \delta'$, also $\ell(x) \in V_{\delta'}$

2. Fall: $\ell(x) \neq 0$

Sei $f_1, f_2, \dots$ eine N -Aufspaltung da $f_i \neq 0$ (versteht sich dann aus 6)

$\Rightarrow 2v(\ell(x)) = 2v(\sum_{i=1}^{\infty} f_i)$ für ein n_0 gilt

$$> \min_{1 \leq i \leq n_0} \{v(f_i^2)\}$$

Wegen $v(f_{i_2}) \geq N(x) - N(e_i) \geq N(x) > 2\delta'$ ist also $v(\ell(x)) > \delta'$

Es gilt also: Kul abgeschlossen. Sei $F_0 := F \cap Kul$

Zeige für $e_0 \in \{e_i \mid i \in I\}$ ist $F_0 = \ell(e_i - e_0)_{i \in I}$

" $\subset$ ": $x \in F_0 \Rightarrow x = \sum_{i \in J} f_i e_i$ für ein geeignetes J endlich

oder A $0 \in J$

$$\ell(x) = 0 = \sum_{i \in J} f_i \Rightarrow -f_0 = \sum_{i \in J \setminus \{0\}} f_i, \quad J' = J \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow x = \left(-\sum_{i \in J'} f_i\right) e_0 + \sum_{i \in J'} f_i e_i$$

$$\Rightarrow x \in \ell(e_i - e_0)_{i \in I}$$

" $\supset$ ": $x = \sum_{i \in J} \lambda_i (e_i - e_0)$ für ein $J \subset I$ endlich, $0 \notin J$

$$= \sum_{i \in J} \lambda_i e_i - \left(\sum_{i \in J} \lambda_i\right) e_0, \quad \text{also } x \in F$$

$$\ell(x) = \sum_{i \in J} \lambda_i - \sum_{i \in J} \lambda_i = 0$$

Da $L_c = L_{ll}$ ist $e_0 \notin F_0^{\perp}$, sonst: $e_0 \in F_0^{\perp} \Rightarrow F_0 + \ell(e_0) = F \subset F_0^{\perp}$

also $\bar{F}_0^{\perp} = \bar{F}_0 = \overline{F \cap Kul} \subset \bar{F} \cap Kul = Kul$, da $\bar{F} = E$ und Kul abgeschlossen (Also ist $F \subset F_0^{\perp} \subset \bar{F}_0^{\perp} \subset Kul$ und damit $F = F_0$)

Widerspruch.

$\Rightarrow \exists y \in F_0^{\perp}$ mit $\Phi(y, e_0) \neq 0$

$$\text{Für } i \in I \text{ gilt dann: } 0 = \Phi(y, e_i - e_0) = \Phi(y, e_i) - \Phi(y, e_0)$$

$$\text{Also auch } y = \sum_I \frac{\Phi(y, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)} e_i = \Phi(y, e_0) \cdot \sum_I \frac{1}{\Phi(e_i, e_i)} e_i$$

Wähle $\gamma > -\beta_0 = -\min\{\alpha, -\beta\}$

$\Rightarrow \exists J_f$ endlich so, dass $\forall J$ endlich mit $J_f \cap J = \emptyset$ gilt

$$N\left(\sum_{i \in J} \frac{1}{\phi(e_i, e_i)} e_i\right) > \delta^*$$

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}$ mit $i \notin J_f$, also $N\left(\frac{1}{\phi(e_i, e_i)} e_i\right) > \delta^*$

$\Rightarrow -\gamma_0 \geq -N(e_i) > \delta^* > -\gamma_0$ Widerspruch

II₃. Der Typ eines Körperelements

Um die nachfolgende Definition des Typs einer Zahl $d \in k$ zu motivieren betrachten wir zunächst folgendes Beispiel:

Sei $\Gamma = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H R_i$ das Itakiproduct mit $R_i = \mathbb{Z} \ \forall i \in \mathbb{N}$ und k ein kommutativer Körper, $v: k \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung so, dass v surjektiv ist und k vollständig (vgl. I₁, I₂ (4)).

Sei $d \in k$ mit $v(d) = (\dots, 0, 1, 0, 0)$. Für $\varphi \in k$ mit $2v(\varphi) + v(d) \geq 0$ gilt dann $2v(\varphi) + v(d) > (\dots, 0, 1, 0)$. Ist Γ als Zahlensystem dargestellt also:

Die Zahlen $v(\varphi^2 d)$ mit $v(\varphi^2 d) \geq 0$

liegen im schraffierten Bereich.

Man erhält also ein "Loch" zwischen 0 und $(\dots, 0, 1, 0)$ in welches Zahlen von der obigen Sorte nie zu liegen kommen.

Diese Situation kann auch in einem beliebigen archimedischen Körper auftreten. Mit der nachfolgenden Definition wird nun eine Möglichkeit gegeben für jedes $d \in k$ sogenannte die "Größe" dieses "Lochs" zu messen.

Sei $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast gewählte Folge in Γ mit

- $\varepsilon_n > 0 \ \forall n$
- $\forall \gamma \in \Gamma \ \exists n_\gamma \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon_n > \gamma \ \forall n \geq n_\gamma$
- $\varepsilon_n < \varepsilon_{n+1} \ \forall n$

$$- \varepsilon_0 := 0$$

(Eine solche Folge existiert wegen A_n)

Sei $d \in \mathfrak{d}$ betrachte $\Gamma_d := \{v(\lambda^2 d) \in \Gamma \mid v(\lambda^2 d) \geq 0\}$ sowie

$$I_d := \{\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_i \leq \gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma_d\}, \text{ also } I_d \neq \emptyset$$

Zeige: existiert $\max I_d$

Sei $\gamma \in \Gamma_d$ fest. Dann existiert n_γ mit $\gamma < \varepsilon_i \quad \forall i \geq n_\gamma$

$\Rightarrow$ höchstens endlich viele $\varepsilon_n \leq \gamma$, also $|I_d| < \infty$

$$\text{Setze } \underline{\text{Typ}}(d) := \max I_d$$

Für $x \in E \setminus \{0\}$ sei $\underline{\text{Typ}}(x) := \underline{\text{Typ}}(\phi(x, x))$

Beobachtung: $\lambda(x) = \lambda(y) \Rightarrow \underline{\text{Typ}}(x) = \underline{\text{Typ}}(y)$ (siehe auch Lemma 17)

II.4. Ein Kriterium für $L_S = L_C$

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des folgenden Satzes

Satz 2 $L_C = L_S \Leftrightarrow E$ vollständig und es existiert eine
maximale orthogonale Familie $(e_i)_{i \in I}$ in
 E so, dass höchstens j endlich viele
unter den e_i den selben Typ haben.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe mehrerer Lemmata.

Lemma 8 Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine beliebige orthogonale Familie in E
und $L_\perp = L_C$. Dann haben höchstens j endlich
viele unter den e_i denselben Typ

Beweis:

Annahme $\exists$ Folge $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\underline{\text{Typ}}(e_k) = \underline{\text{Typ}}(e_1) = n_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wähle $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathfrak{d}$ mit $0 \leq v(\lambda_k^2 \phi(e_k, e_k)) < \varepsilon_{n+1} \quad \forall k$

Für $f_k := \lambda_k e_{c_k}$ gilt dann: $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine orthogonale Familie mit $0 \leq N(f_k) \leq \varepsilon_{n_k+1} \quad \forall k$
also mit dem Satz von Borel und Lebesgue $L_\infty \neq L_1$ Widerspruch.

Lemma 9 (Orlicz)

Sei $(\tilde{E}, \tilde{\Phi})$ die Komplettierung von (E, Φ) . Seien $x_1, \dots, x_n$ in $\tilde{E}$ paarweise orthogonal. Dann existieren Folgen $(y_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ in E , $i=1, \dots, n$, mit
(i) $y_{ik} \perp y_{jr}$ für $i \neq j$, $k, r=0, 1, 2, \dots$, wo $y_{i0} = x_i$, $i=1, \dots, n$
(ii) $x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{ik} \quad i=1, \dots, n$

Beweis: (vgl. [16, p. 182, Lemma 7.41])

1) Zeige: $z \in \tilde{E}$, $z \neq 0 \Rightarrow \{z\}^\perp \cap E$ (topologisch) dicht in $\{z\}^\perp$

Sei $y \perp z$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in E mit $y = \lim y_n$, $z = \lim z_n$

oBdA $\tilde{\Phi}(z_n, z) \neq 0 \quad \forall n$, denn $0 \neq \tilde{\Phi}(z, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(z_n, z)$, da $\tilde{\Phi}$ stetig

Wähle $y_0 \geq v(\tilde{\Phi}(z, z))$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$v(\tilde{\Phi}(z, z) - \tilde{\Phi}(z_n, z)) > y_0 \quad \forall n \geq n_0$

Annahme: $\exists n \geq n_0$ mit $\tilde{\Phi}(z_n, z) = 0$

$\Rightarrow v(\tilde{\Phi}(z, z)) > y_0$, Widerspruch. Also ist $\tilde{\Phi}(z_n, z) \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Setze $y'_n := y_n - \tilde{\Phi}(y_n, z) \tilde{\Phi}(z_n, z)^{-1} z_n \quad \forall n$

$\Rightarrow y'_n \in E$ und $\tilde{\Phi}(y'_n, z) = \tilde{\Phi}(y_n, z) - \tilde{\Phi}(y_n, z) \cdot \tilde{\Phi}(z_n, z)^{-1} \tilde{\Phi}(z_n, z) = 0 \quad \forall n$

Da $z_n \rightarrow z$, $y_n \rightarrow y$ und $\tilde{\Phi}$ stetig, gilt: $\tilde{\Phi}(y_n, z) \tilde{\Phi}(z_n, z)^{-1} z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(y, z) \tilde{\Phi}(z, z)^{-1} z$

Wegen $y \perp z$ ist also $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = y$.

2) Zeige: Y unendlichdimensionaler Teilraum von $\tilde{E}$, $y \perp Y$

$\Rightarrow \exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $z_n \perp Y \quad \forall n$ und $y = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

Sei $y_1, \dots, y_s$ eine Orthogonalbasis von Y .

Induktion nach s: $s=1$: richtig wegen 1)

Sei W linear für $r \leq s-1$ und sei $W := (y_s) \oplus \dots \oplus (y_{s-1})$

$\Rightarrow W^\perp \cap E$ dicht in $W^\perp$ nach Induktionsvoraussetzung

Zeige: $W^\perp \cap E$ dicht in $U^\perp$ } $\Rightarrow (U+(z))^\perp \cap E$ dicht in $(W+(z))^\perp$
 $z \neq 0$ und $z \perp W$

Sei $y \perp W$ und $y \perp z$. Dann existiert $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^\perp \cap E$ mit $\lim y_n = y$. Da $z \in U^\perp$ existiert auch $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $W^\perp \cap E$ mit $z = \lim z_n$.

Durch ist obdA $\tilde{\Phi}(z_n, z) \neq 0$. Man führt jetzt dieselben Überlegungen durch wie auch 1): $u_n := y_n - \tilde{\Phi}(y_n, z) \tilde{\Phi}(z_n, z)^{-1} z_n$, also

$u_n \in W^\perp \cap E$ und $\tilde{\Phi}(u_n, z) = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow u_n \in (W+(z))^\perp \cap E \quad \forall n$ und $\lim u_n = \lim y_n = y$

3) Seien $x_1, \dots, x_n$ paarweise orthogonal in $\tilde{E}$. Zeige induktiv, dass $(y_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ in E existieren mit

$$(*) \begin{cases} N(y_{ik} - y_{i0}) > \varepsilon_k & \text{für } i=1, \dots, n \quad ((\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ die oben festgelegte Folge in } \Gamma) \\ y_{ik} \perp y_{ir} & \text{für } i \neq j; k, r = 0, 1, 2, \end{cases}$$

Seien bereits $y_{11}, \dots, y_{1k}; \dots; y_{n1}, \dots, y_{nk}$ konstruiert mit (*) erfüllt. (eigentliches als Fall Lemma k) Konstruktion von $y_{1k+1}, \dots, y_{nk+1}$:

y_{1k+1}

Nach dem zweiten Teil des Lemmas existiert $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $z_n \perp y_{ir} \quad \forall i \neq 1, r=0, \dots, k$ und $y_{10} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ (setze $y := \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{ir})_{i=1, \dots, n}$) und $y := y_{10}$.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(z_n - y_{10}) > \varepsilon_{k+1} \quad \forall n \geq n_0$ (N wie in Lemma 4))

Setze $y_{1k+1} := z_n$ für ein festes $n \geq n_0$. Dann ist $N(y_{1k+1} - y_{10}) > \varepsilon_{k+1}$ und $y_{1k+1} \perp y_{ir} \quad \forall i \neq 1, r=0, \dots, k$

y_{sk+1} für $2 \leq s \leq n$:

Setze $y := \lim (y_{10}, y_{1k+1}, \dots, y_{s-1k+1}, y_{s+10}, \dots, y_{s+1k}, y_{nk})$, schematisch.

Vergleiche mit dem eingeleiteten Verfahren

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 = y_{10} & y_{11} & \dots & y_{1k} & y_{1k+1} & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\
 x_{s-1} = y_{s-10} & & & & & y_{s-1k+1} & \\
 & & & & & & \\
 x_s = y_{s0} & & \dots & & y_{sk} & * & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 x_n = y_{n0} & y_{n1} & \dots & & y_{nk} & &
 \end{array}$$

* zu konstruieren

$$y := y_{s0}$$

Nach 2) existiert also $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E mit $z_n \perp y \forall n$ und $y_{s0} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{N}(z_n - y_{s0}) > \varepsilon_{k+1} \forall n \geq n_0$.

Setze $y_{sk+1} := z_n$ für ein festes $n \geq n_0$.

Schlussendlich ist also (*) erfüllt auch für $y_{n1}, y_{n1+1}, y_{n1+1}, y_{nk+1}$.

Da $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ minimal in Γ ist also $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{ik} = x_i$ für $i=1, \dots, n$, also die Behauptung richtig.

Lemma 10 (Ortoli)

$$L_C = L_S \Rightarrow E \text{ ist vollständig}$$

Beweis: (vgl. [16, Lemma 7.42])

Sei $\tilde{E}$ Unvollständigkeit von E , $\tilde{\Phi}$ Fortsetzung von Φ auf $\tilde{E}$. Sei $0 \neq x_0 \in \tilde{E}$ beliebig. Setze $x_0 \in E$.

Da E dicht in $\tilde{E}$ und $\tilde{\Phi}$ stetig, existiert $y \in E$ mit $\tilde{\Phi}(y, x_0) \neq 0$.

Es gilt $\lambda := \frac{\tilde{\Phi}(x_0, x_0)}{\tilde{\Phi}(y, x_0)}$ gilt $\lambda y - x_0 \perp x_0$, also kann man obelA

von Anfang an annehmen, dass $y - x_0 \perp x_0$. Setze $z_0 := y - x_0$.

Nach Lemma 9 für $n=2$ existieren $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E so, dass $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ und $x_n \perp z_m \forall n, m=0, 1, 2, \dots$

Sei $M := \overline{\text{lin}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$, wo ---^E topologische Abschluss in E .

$$\Rightarrow E = M + M^{\perp E}, \text{ da } L_C = L_S$$

Nach $z_m \perp x_n \forall n, m \in \mathbb{N}$ ist $z_m \in M^{\perp E} \forall m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow x_0 \in \overline{M}^{\tilde{E}}, z_0 \in \overline{M^{\perp E}}^{\tilde{E}}$. Es ist also $\overline{M^{\perp E}}^{\tilde{E}} \subset (\overline{M}^{\tilde{E}})^{\perp \tilde{E}}$, denn:

Sei $v \in \overline{M^{\perp E}}^{\tilde{E}} \Rightarrow v = \lim v_n$ mit $v_n \in M^{\perp E} \forall n$

Sei $w \in \overline{M}^{\tilde{E}}$, also $w = \lim w_n$ mit $w_n \in M \forall n$

$\Rightarrow \tilde{\Phi}(v, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(v_n, w_n) = 0$ (vgl. Lemma 4)

Also ist $v \in (\overline{M}^{\tilde{E}})^{\perp \tilde{E}}$.

$\Rightarrow y = x_0 + z_0$ mit $x_0 \in \overline{M}^{\tilde{E}}, z_0 \in (\overline{M}^{\tilde{E}})^{\perp \tilde{E}}$

Wegen $E = M + M^{\perp E}$ ist also auch $y = x'_0 + z'_0$ mit $x'_0 \in M, z'_0 \in M^{\perp E}$

$\Rightarrow x_0 - x'_0 = z'_0 - z_0 \in \overline{M}^{\tilde{E}} \cap (\overline{M}^{\tilde{E}})^{\perp \tilde{E}}$, da $M^{\perp E} \subset \overline{M^{\perp E}}^{\tilde{E}}$

Also $\overline{M}^{\tilde{E}} \cap (\overline{M}^{\tilde{E}})^{\perp \tilde{E}} = \{0\}$, da $\tilde{\Phi}$ anisotrop. Also ist $x'_0 = x_0$

und damit $x_0 \in M \subset E$

Mit Lemma 8 und Lemma 10 ist also gezeigt, dass die in Satz 2 angegebenen Eigenschaften notwendig sind für die Gleichheit von L_c und L_s (verursacht noch $I_3(9)$)

Lemma 11 (Gross)

Sei $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{j \in I_i} L(e_j) \right)$ wo $|I_i| < \infty \forall i$,

$\text{Typ}(e_j) = n(i) \forall j \in I_i$ und $\text{Typ}(e_j) \neq n(i)$ für $j \notin I_i$

$\Rightarrow$ In E gibt es höchstens $|I_i|$ paarweise orthogonale Vektoren, die denselben Typ haben wie ein e_j mit $j \in I_i$

Beweis: (Gross)

Sei zunächst: $\left\{ \begin{array}{l} x \in E \setminus \{0\} \text{ mit } \text{Typ}(x) = m \\ \Rightarrow x = \bar{x} + r_x \text{ wo } \bar{x} \in \bigoplus_{j \in I_i} L(e_j) =: E_i \text{ mit} \\ \text{Typ}(e_j) = m \forall j \in I_i, \bar{x} \neq 0 \text{ und } r_x \notin E_i \end{array} \right.$

$x = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j e_j$, endlich, $f_j \neq 0 \forall j \in \mathbb{N}$

Näre $\bigcap I_i = \emptyset \Rightarrow N(x) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{N(f_j e_j)\} = N(f_{j_0} e_{j_0})$ mit $\text{Typ}(e_{j_0}) \neq m$

also $\text{Typ}(x) \neq m$ Widerspruch

E ist also $\bigcap I_i = \emptyset \neq \emptyset$. Setze $\bar{x} := \sum_{j \in I_0} f_j e_j$

Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise orthogonal mit demselben Typ m . Sei $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $T(e_j) = m \quad \forall j \in I_{i_0}$.

$\Rightarrow x_i = \bar{x}_i + r_i$ mit $\bar{x}_i \in \bigoplus_{j \in I_{i_0}}^\perp \mathcal{L}(e_j) =: E_{i_0}$, $r_i \notin E_{i_0}$, $\bar{x}_i \neq 0$ für $i = 0, \dots, n$
wegen (Δ)

Weile ist $\bar{x}_i \perp r_j \quad \forall i, j$ und deshalb $N(x_i) = \min\{N(\bar{x}_i), N(r_i)\} \quad \forall i$.

Wegen $\text{Typ}(\bar{x}_i) = \text{Typ}(x_i) \neq \text{Typ}(r_i)$ ist also $N(\bar{x}_i) < N(r_i)$

$\Rightarrow N(x_i) = N(\bar{x}_i) < N(r_i) \quad \forall i$

Ausschneide: $n+1 > |I_{i_0}|$

$\Rightarrow \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n$ linear abhängig, also $\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i$

$\forall i \geq 1$ ist $0 = \Phi(x_0, \lambda_i x_i) = \Phi(\bar{x}_0 + r_0, \lambda_i \bar{x}_i + r_i) = \Phi(\bar{x}_0, \lambda_i \bar{x}_i) + \Phi(r_0, \lambda_i r_i)$

$\Rightarrow \Phi(\bar{x}_0, \lambda_i \bar{x}_i) = -\Phi(r_0, \lambda_i r_i) \quad \forall i \geq 1$

$\Rightarrow 2v(\Phi(\bar{x}_0, \lambda_i \bar{x}_i)) = 2v(\Phi(r_0, \lambda_i r_i)) \geq N(r_0) + N(\lambda_i r_i) > N(\bar{x}_0) + N(\lambda_i x_i)$ für
 $i = 1, \dots, n$

Berechne jetzt $N(\bar{x}_0)$ auf zwei Arten:

$N(\bar{x}_0) = N(\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i) = N(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i)$ Zeige: $N(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \neq N(\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i)$

Sonst wäre $\tilde{r} = \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i$ ungleich Null, da $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig. Also nach (Δ) $\tilde{r} = \bar{r} + r_0$ mit $\bar{r} \neq 0$, $\bar{r} \in E_{i_0}$

$\Rightarrow 0 = \Phi(\tilde{r}, e_j) = \Phi(\bar{r}, e_j) \quad \forall j \in I_{i_0}$

$\Rightarrow \bar{r} = 0$ Widerspruch

Es gilt sogar $N(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) < N(\sum_{i=1}^n \lambda_i r_i)$, da sonst $N(\bar{x}_0) = N(\tilde{r}) = m$

und man würde denselben Widerspruch ableiten wie vorher

$\Rightarrow N(\bar{x}_0) = N(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{N(\lambda_i x_i)\}$

Ausdrucks ist $2N(\bar{x}_0) = 2v(\Phi(\bar{x}_0, \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{x}_i)) \geq \min_{1 \leq i \leq n} 2v(\Phi(\bar{x}_0, \lambda_i \bar{x}_i))$
 $> N(\bar{x}_0) + \min_{1 \leq i \leq n} \{N(\lambda_i x_i)\}$ nach obiger Rechnung
 $= N(\bar{x}_0) + N(x_0)$

Also ist $N(\bar{x}_0) > N(x_0)$ Widerspruch

Lemma 12 Sei E v. u. in Lemma 11, $\tilde{E}$ die Komplettierung von E . Dann gilt
 In $\tilde{E}$ gibt es höchstens $|I|$ paarweise orthogonale Vektoren, die denselben Typ haben wo es ein e_j mit $j \in I$.

Beweis

Seien $x_1, \dots, x_n$ paarweise orthogonal in $\tilde{E}$ mit $\text{Typ}(x_i) = m \ \forall i$
 $\Rightarrow \exists$ Folgen $(y_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$ in E mit $x_i = \lim y_{ik}$ für $i=1, \dots, n$ mit
 $y_{ik} \perp y_{jr}$ für $i \neq j, \quad k, r = 0, 1, 2, \dots$ wo $y_{i0} = x_i, \forall i$ (vgl. Lemma 9)
 $\Rightarrow N(x_i) = N(y_{ik}) = N(y_{i, k_0(i)}) \quad \forall k \geq k_0(i)$ wo $k_0(i)$ jezipmt
 Sei $k_0 := \max_{1 \leq i \leq n} \{k_0(i)\}$, also $N(x_i) = N(y_{i, k_0}) \ \forall i$. Dabei ist $y_{i, k_0} \perp y_{j, k_0}$
 für $i \neq j$. Der $\text{Typ}(y_{i, k_0}) = \text{Typ}(x_i) = m \ \forall i$ folgt mit Lemma 11,
 dass $n \leq |I_{k_0}|$, wo I_{k_0} jene Indizes mit $\text{Typ}(e_j) = m \ \forall j \in I_{k_0}$ ist.

Beweis von Satz 2:

Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine maximale orthogonale Familie in E so, dass
 höchstens j unendlich viele unter den e_i denselben Typ haben
 und sei E vollständig
 $\Rightarrow |I| \leq \aleph_0$; oBdA $I = \mathbb{N}$ (falls $|I| < \infty$ ist klar, dass $L_e = L_e$)

i) Zeige $E = \overline{\text{lin}(f_i)_{i \in \mathbb{I}}}$ für jede maximale orthogonale Familie
 $(f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ in E und $(f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ erfüllt wieder die Bedingung
 über den Typen

jez. gerundet $E = \overline{\text{lin}(e_i)_{i \in \mathbb{I}}}$. Dannware dass die e_i wo folgt
 $e_1, \dots, e_{m_0}$ jene mit Typ Null, $e_{m_0+1}, \dots, e_{m_1}$ jene mit Typ Eins, etc.
 Also gilt für $n > m_k$: $\text{Typ}(e_n) > k$

Sei $x \in E$, $f_i = \frac{\Phi(x, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)}$, oBdA $x \neq 0$

1 Fall: $N(x) \geq 0$

Zeige: $(f_i e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

Sei $f \in \Gamma \Rightarrow \exists n_f \in \mathbb{N}$ mit $E_n > f \quad \forall n \geq n_f$, wo $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die oben fest gewählte Folge in Γ ist. Sei $i > m_{n_f}$.

$$\Rightarrow N(f; e_i) = 2v(f_i) + N(e_i) = 2v(\Phi(x; e_i)) - N(e_i) \geq N(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow N(f; e_i) \geq E_{n_f}(e_i) > E_{n_f} > f \quad \text{da } \text{Typ}(e_i) > n_f$$

Also ist $(\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E . Da E vollständig, existiert also $y := \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i$ in E . Zeige: $x = y$

$\forall f \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Stetigkeit von Φ :

$$\Phi(x - y, e_i) = \Phi(x, e_i) - \sum_{j=1}^{\infty} f_j \Phi(e_j, e_i) = \Phi(x, e_i) - f_i \Phi(e_i, e_i) = 0$$

Da $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ maximal, also $x - y = 0$

2. Fall $N(x) < 0$

Für $\lambda := \Phi(x, x)^{-1}$ gilt $N(\lambda x) > 0$, also $\lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda x, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)} e_i$, nach 1. Fall
 $\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i$

Sei nun $(f_i)_{i \in I'}$ eine beliebige maximale orthogonale Familie in E , $E_0 = \overline{\text{h}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}}$.

$\Rightarrow E$ ist die Komplettierung von E_0 , also $E = \bar{E}_0$ vollständig

$\Rightarrow$ höchstens μ unendlich viele unter den f_i haben denselben Typ (wegen Lemma 12)

Jetzt kann man dieselben Überlegungen wie vorher für $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auch für $(f_i)_{i \in I'}$ durchführen und erhält also auch $E = \overline{\text{h}(f_i)_{i \in I'}}$, wobei $I' = \mathbb{N}$

2) Zeige: $L_C = L_S$

Sei $F \neq \{0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von E . Wähle in F eine maximale orthogonale Familie $(f_i)_{i \in I}$ und erzeuge diese zu maximaler orthogonaler Familie $(f_i)_{i \in I}$ von E . Nach 1) ist obdA $I = \mathbb{N}$

$$i) \quad \forall x \in E \text{ und } f_i = \frac{\Phi(x, f_i)}{\Phi(f_i, f_i)} \quad \forall i \in I \text{ existiert } y = \sum_{i \in I} f_i f_i \text{ in } F$$

denn: obdA dim $F = \infty$. Nach 1) ist $x = \sum_{i \in I} f_i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i f_i$

Dabei ist $(f_i f_i)_{i \in I_0}$ ebenfalls Nullfolge, also existiert $y = \sum_{i \in I_0} f_i f_i$ in E . Da F abgeschlossen ist, folgt $y \in F$.

$$ii) F = \overline{\mathcal{L}(f_i)_{i \in I_0}}$$

denn: Sei $x \in F$ beliebig

$$\Rightarrow x - y = \sum_{i \in I_0} f_i f_i \in F \text{ nach i).}$$

Weiter ist für $x \in I_0: \phi(x - y, f_k) = \sum_{i \in I_0} f_i \phi(f_i, f_k) = 0$. Da $(f_k)_{k \in I_0}$ maximal in F , ist also $x = y \in \overline{\mathcal{L}(f_i)_{i \in I_0}}$.

Setze $z = x - y$ für x, y wie in i). Es zeigen bleibt: $z \in F^\perp$

Sei $w \in F$ beliebig, also $w = \sum_{i \in I_0} g_i f_i$ nach ii)

$$\Rightarrow \phi(z, w) = \sum_{i \in I_0} g_i \phi(z, f_i) = 0, \text{ da } \phi(z, f_i) = 0 \quad \forall i \in I_0$$

II₅ Konstruktion von Beispielen

Sei $(\mathcal{L}, \nu, \Gamma)$ bewerteter Körper, der die Eigenschaft (1) aus I_2 erfüllt. Damit soll zunächst nur ein bilinear Raum (H, Φ) konstruiert werden.

Sei $H = \{ (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \alpha_i \text{ existiert in } \mathcal{L} \}$, wo $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ fest gewählte Folge in $\mathcal{L}$. Dann gilt: H ist ein $\mathcal{L}$ -Vektorraum.

Weiter ist $\Phi: H \times H \rightarrow \mathcal{L}$ definiert durch $\Phi((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (g_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i \alpha_i$, eine symmetrische Bilinearform auf H und Φ reicht aus, um die Motivation für diese Konstruktion liefert folgendes Lemma.

Lemma 13 Sei (E, Φ) ein bilinear Raum wie in I_1 . Sei $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_s$ und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine maximale orthogonale Familie in E ; $\alpha_i = \Phi(e_i, e_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Dann ist E isomorph zu H .

Beweis

Behaupte $\eta: x \in E$ beliebig die Folge $\left(\frac{\Phi(x, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}$, $\xi_i = \frac{\Phi(x, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)}$

Da Φ stetig ist und $L_C = L_S$, gilt: $\Phi(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i^2 \Phi(e_i, e_i)$

Also ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in H$

Setze $\varphi: E \rightarrow H$

$$x \mapsto \left(\frac{\Phi(x, e_i)}{\Phi(e_i, e_i)} \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

$\Rightarrow \varphi$ ist linear und injektiv. Zeige: φ surjektiv

Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in H$. Dann ist $x_n := \sum_{i=1}^n f_i e_i \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in E , denn: Sei $\delta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $\nu(f_i^2 e_i) > \delta \quad \forall n \geq n_\delta$

Seien $n, m \geq n_\delta$, also $n > m$. Dann ist $N(x_n - x_m) = N\left(\sum_{i=m+1}^n f_i e_i\right)$
 $= \min_{m+1 \leq i \leq n} \{ \nu(f_i^2 e_i) \} > \delta$

$L_C = L_S \Rightarrow E$ vollständig, also existiert $x \in E$ mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i$.

zu zeigen bleibt: $\varphi(x) = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\frac{\Phi(x, e_j)}{\Phi(e_j, e_j)} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \frac{\Phi(e_i, e_j)}{\Phi(e_j, e_j)} = f_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Zeige: $\tilde{\Phi}(\varphi x, \varphi y) = \Phi(x, y) \quad \forall x, y \in E$

Seien $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \in E$ mit $\varphi x = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}, \varphi y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \tilde{\Phi}((f_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \eta_i a_i$$

$$\Phi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i \eta_j \Phi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n f_i \eta_i a_i$$

Das Ziel dieses Kapitels besteht jetzt darin, Folgenräume (H, Φ) so zu konstruieren, dass $L_S = L_C$ wird. Im ersten ersten Schritt soll gewährleistet werden, dass C.S. erfüllt ist. Zunächst gilt:

Lemma 14 Sei (h, ν, Γ) konkreter Körper der $I_2(1)$ -Typ, (E, Φ) ein nicht ausgeglichter, bilinear Raum über h . Φ erfüllt C.S. genau dann, wenn Φ anisotrop ist und für je zwei orthogonale Vektoren $x, y \in E \setminus \{0\}$ gilt

$$N(x+y) = \min \{ N(x), N(y) \}$$

Beweis:

Die Notwendigkeit der beiden Bedingungen ist klar nach Lemma 1 und 1.7. Die Bedingungen sind auch hinreichend: (vgl. [6, 5.7]).
Seien $x, y \in E \setminus \{0\}$, $x \neq y$ (sonst ist die Behauptung klar). Da Φ anisotrop existiert $z := \lambda x + y$ mit $\lambda = \frac{-\Phi(x, y)}{\Phi(x, x)}$

$$\Rightarrow \Phi(x, z) = 0$$

$$\Rightarrow 2v(\Phi(x, y)) = 2v(\Phi(x, z - \lambda x)) = 2v(\lambda \Phi(x, x)) = N(\lambda x) + N(x) \quad (*)$$

Es ist also $N(y) = N(z - \lambda x) = \min\{N(z), N(\lambda x)\}$ nach Voraussetzung, sofern $z \neq 0$. In diesem Fall ist also $N(y) \leq N(\lambda x)$, also die Behauptung richtig wegen (*). Falls $z = 0$, ist $y = \frac{\Phi(x, y)}{\Phi(x, x)} x$
 $\Rightarrow 2v(\Phi(x, y)) = 2N(x) + N(x) = N(y)$

Für Folgenräume hat man

Lemma 15 Sei $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge in k und

$$H = \left\{ (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in k^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \alpha_i \text{ existiert in } k \right\}, \text{ wobei}$$

Φ die übliche definierte Bilinearform auf H

Dann gilt

$$\Phi \text{ erfüllt CS} \iff \begin{cases} v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 \alpha_i)\} \\ \text{für } f_i \in k \text{ beliebig und } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Beweis

" $\Rightarrow$ ": Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $f_1, \dots, f_n \in k$ in H sind für $i \in \mathbb{N}$ beliebig, $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ (Kronecker Symbol) $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$, also $f_1 e_1, \dots, f_n e_n$ paarweise orthogonal und $N(f_i e_i) = v(f_i^2 \alpha_i)$

1. Fall: $f_i = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i\right) = \infty = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 \alpha_i)\}$$

2. Fall: $\exists i_0$ mit $f_{i_0} \neq 0$

obdA wir so nummeriert, dass $f_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq i_0$ und $f_i = 0 \quad \forall i > i_0$

$$\text{Lemma 1} \Rightarrow v\left(\sum_{i=1}^{i_0} f_i^2 \alpha_i\right) = \min_{1 \leq i \leq i_0} \{v(f_i^2 \alpha_i)\} = \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i^2 \alpha_i)\}$$

$$\text{also auch } v\left(\sum_{i=1}^{i_0} f_i^2 \alpha_i\right) = v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i\right)$$

" $\Leftarrow$ ": Jeze zunächst Φ assoziativ

Sei $x = (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq 0$ in H . Dann existiert $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_{i_0} \neq 0$

Annahme: $\Phi(x, x) = 0$

$\Rightarrow (\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge Wähle $\gamma_0 := v(f_{i_0}^2 \alpha_{i_0}) \in \Gamma$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $v(\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i) > \gamma_0 \quad \forall n \geq n_0$

oder $n_0 \geq i_0 \Rightarrow$ für $n \geq n_0$ ist $\gamma_0 < v(\sum_{i=1}^n f_i^2 \alpha_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 \alpha_i)\}$ nach

Voraussetzung

$\Rightarrow \gamma_0 < v(f_{i_0}^2 \alpha_{i_0})$, da $n \geq i_0$ Widerspruch

Seien jetzt $x = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}, y = (g_i)_{i \in \mathbb{N}} \in H \setminus \{0\}$ mit $x \neq y$ (oder A)

zu zeigen: $2v(\Phi(x, y)) \geq N(x) + N(y)$

Für $m \in \mathbb{N}$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} 2v\left(\sum_{i=1}^m f_i g_i \alpha_i\right) &\geq 2 \cdot \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i g_i \alpha_i)\} = \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i^2 \alpha_i) + v(g_i^2 \alpha_i)\} \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq m} \{v(f_i^2 \alpha_i)\} + \min_{1 \leq i \leq m} \{v(g_i^2 \alpha_i)\} \\ &= v\left(\sum_{i=1}^m f_i^2 \alpha_i\right) + v\left(\sum_{i=1}^m g_i^2 \alpha_i\right) \text{ nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Nehmen $\Phi(x, y) \neq 0, \Phi(x, x) \neq 0, \Phi(y, y) \neq 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$v(\Phi(x, y)) = v\left(\sum_{i=1}^{n_0} f_i g_i \alpha_i\right), N(x) = v\left(\sum_{i=1}^{n_0} f_i^2 \alpha_i\right), N(y) = v\left(\sum_{i=1}^{n_0} g_i^2 \alpha_i\right)$$

$$\Rightarrow 2v(\Phi(x, y)) = 2v\left(\sum_{i=1}^{n_0} f_i g_i \alpha_i\right) \geq v\left(\sum_{i=1}^{n_0} f_i^2 \alpha_i\right) + v\left(\sum_{i=1}^{n_0} g_i^2 \alpha_i\right) = N(x) + N(y)$$

Es sei nun Γ eine beliebige geordnete abelsche Gruppe,

$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geq 0\}$ und $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Γ_+ so, dass gilt:

$$\gamma_i = \gamma_j \pmod{2\Gamma} \Rightarrow \gamma_i = \gamma_j$$

Für einen beliebigen kommutativen Körper k sei $K = \overline{k(X)}^{\Gamma_+}$

(vgl. I.2 (4)) und $\alpha_i := X^{\gamma_i} \in K$.

Mit Hilfe von Lemma 15 kann man jetzt entscheiden,

Wenn es denn aus $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gebauten Folgeraum C.S. erfüllt ist
Sei dazu $s(k)$ die Stufe von k (vgl. I.2).

Lemma 16 Für $H = \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 a_i \text{ existiert in } K\}$ gilt

$$\Phi \text{ erfüllt C.S.} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - k \text{ formal reell, falls } \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{ aus Teilsystem } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ exis-} \\ \text{ tiert mit } \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n \\ - s(k) \geq m, \text{ falls eine maximale} \\ \text{ Anzahl } m \text{ gleicher Elemente} \\ \text{ in der Folge } (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ existiert.} \end{array} \right.$$

Beweis:

(I) Zeige zunächst $v(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 a_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\xi_i^2 a_i)\}$ für $\xi_i \in K, n \in \mathbb{N}$

$$\Updownarrow$$

$$(x) \quad v(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 a_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\xi_i^2 a_i)\} \text{ für } \xi_i \in L[X]^{\Gamma_n}, n \in \mathbb{N}$$

" $\Downarrow$ " klar

" $\Uparrow$ " 1. Schritt Zeige: (x) $\Rightarrow v(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 a_i) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\xi_i^2 a_i)\}$ für $\xi_i \in L(X)^{\Gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Seien $\xi_i = \frac{v_i}{\rho_i} \in L(X)^{\Gamma_n}$, $v_i \in L[X]^{\Gamma_n}$, $\rho_i \in L[X]^{\Gamma_n} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 a_i) &= v(\sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{\rho_i^2} a_i) = -v(\rho_1^2 \dots \rho_n^2) + v(\sum_{i=1}^n v_i^2 \rho_1^2 \dots \rho_{i-1}^2 \rho_{i+1}^2 \dots \rho_n^2 a_i) \\ &= -v(\rho_1^2 \dots \rho_n^2) + \min_{1 \leq i \leq n} \{v(v_i^2 \rho_1^2 \dots \rho_{i-1}^2 \rho_{i+1}^2 \dots \rho_n^2 a_i)\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\frac{v_i^2}{\rho_i^2} a_i)\} \end{aligned}$$

2. Schritt: die Behauptung ist richtig für $\xi_i \in K$

Seien $\xi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{ik} \in K$, $\eta_{ik} \in L(X)^{\Gamma_n} \forall i, k$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i^2 a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^n \eta_{ik}^2 a_i)$$

1. Fall: $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i = 0$

$\Rightarrow (\sum_{i=1}^n \eta_{i,k}^2 \alpha_i)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge Sei $1 \leq i_0 \leq n$ beliebig, $\mu \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists \eta_\mu \in \mathbb{N} \text{ mit } \mu < \nu\left(\sum_{i=1}^n \eta_{i,k}^2 \alpha_i\right) \quad \forall k \geq \eta_\mu \\ = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \nu(\eta_{i,k}^2 \alpha_i) \} \quad \text{nach Voraussetzung } \forall k \geq \eta_\mu \\ \leq \nu(\eta_{i_0,k}^2 \alpha_{i_0}) \quad \forall k \geq \eta_\mu \end{aligned}$$

Also ist $(\eta_{i_0,k}^2 \alpha_{i_0})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit auch $(\eta_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Damit ist also $\xi_{i_0} = 0$.

Also ist gezeigt: $\xi_i = 0 \quad \forall i \leq n$. Damit ist also die Behauptung bewiesen.

2. Fall: $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{Sei } I = \{1 \leq i \leq n \mid \xi_i \neq 0\} \Rightarrow \nu\left(\sum_{i \in I} \xi_i^2 \alpha_i\right) = \nu\left(\sum_{i \in I} \eta_{i,k}^2 \alpha_i\right) \quad \forall k \geq k_0, k_0 \text{ geeignet} \\ = \min_{i \in I} \{ \nu(\eta_{i,k}^2 \alpha_i) \} \quad \forall k \geq k_0 \\ \text{nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Für $i \in I$ ist $\nu(\xi_i^2 \alpha_i) = \nu(\eta_{i,k}^2 \alpha_i) \quad \forall k \geq k(i)$, wo $k(i) \in \mathbb{N}$ geeignet gewählt.

$$\text{Sei } \tilde{k} = \max \{ k(i) \mid i \in I \} \cup \{k_0\}$$

$$\Rightarrow \nu\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i\right) = \nu\left(\sum_{i \in I} \xi_i^2 \alpha_i\right) = \min_{i \in I} \{ \nu(\xi_i^2 \alpha_i) \} = \min_{i \in I} \{ \nu(\eta_{i,\tilde{k}}^2 \alpha_i) \} = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \nu(\xi_i^2 \alpha_i) \}$$

(II) Beweis des Lemmas:

" $\Rightarrow$ ": 1. Fall: $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert ein Teilsystem $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n$ in der Folge $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \dots = \mathcal{J}_n$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, sodass $\mathcal{J}_1 = \dots = \mathcal{J}_n$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$.

Zeige: $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0$

$$\text{Setze } \xi_i = \lambda_i X^0 \rightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 X^0 X^{\delta_i} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) X^{\nu}, \text{ da } \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \dots = \mathcal{J}_n$$

$$\nu\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \nu(\xi_i^2 \alpha_i) \} = \mathcal{J}_n \in \Gamma \quad \text{nach Lemma 15}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0, \text{ also } k \text{ formal reell.}$$

2. Fall: $\exists m \in \mathbb{N}$ maximale Anzahl gleicher Elemente in der Folge $(\mathcal{J}_i)_{i \in \mathbb{N}}$

Zeige: $s(k) \geq m$

Annahme: $s(\mathcal{L}) < m$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ und $-1 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2$ für $\lambda_i \in \mathcal{L}$ Wähler
 $f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$ mit $f'_k = f_{n+1}$ für $k = 2, \dots, n+1$ (möglich, da $n+1 \leq m$)

Setze weiter $f_i := \lambda_i \cdot X^0$ für $1 \leq i \leq n+1$ wobei $\lambda_{n+1} := -1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 a_{1k} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k^2 \right) X^{f'_{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow v\left(\sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 a_{1k}\right) = \infty > \min_{1 \leq k \leq n+1} \{v(f_k^2 a_{1k})\} \quad \text{Widerspruch zu Lemma 15}$$

" $\Leftarrow$ ": Nach (I) und Lemma 15 genügt es zu zeigen

$$v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 a_i\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 a_i)\} \quad \text{für } f_i \in \mathcal{L}[X]^{\Gamma_n}, n \in \mathbb{N}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $f_i \in \mathcal{L}[X]^{\Gamma_n}$ für $1 \leq n$ oder $v(f_i^2 a_i) = v(f_{i+1}^2 a_{i+1})$ für
 $i = 2, \dots, n$, denn: Durch Umnummerieren kann man erreichen, dass
 gilt: $v(f_1^2 a_1) = \dots = v(f_n^2 a_n)$, $v(f_{n+1}^2 a_{n+1}) = \dots = v(f_m^2 a_m)$

$$\Rightarrow v\left(\sum_{i=1}^m f_i^2 a_i\right) = v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 a_i\right) + \dots + v\left(\sum_{i=n+1}^m f_i^2 a_i\right)$$

Falls also schon gezeigt ist $v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 a_i\right) = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 a_i)\}$ für $f_i \in \mathcal{L}$
 mit $v(f_1^2 a_1) = \dots = v(f_n^2 a_n)$ gilt:

$$v\left(\sum_{i=1}^m f_i^2 a_i\right) = \min \{v(f_1^2 a_1), v(f_2^2 a_2), \dots, v(f_m^2 a_m)\} = \min_{1 \leq i \leq n} \{v(f_i^2 a_i)\}$$

Sei also $v(f_i^2 a_i) = v(f_1^2 a_1)$ für $i = 2, \dots, n$

$$\Rightarrow f_i \equiv f_1 \pmod{2\Gamma} \quad \text{für } i = 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_i = f_1 \quad \text{für } i = 2, \dots, n \quad \text{nach Voraussetzung über } (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow v(f_i) = v(f_1) \quad \text{für } i = 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_i = b_i \cdot X^{\delta_i} \quad \text{mit } b_i \in \mathcal{L}, v(f_i) = \delta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i^2 a_i = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) X^{2\delta_1 + f'_1}$$

$$a) \mathcal{L} \text{ formal reell} \Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i^2 \neq 0, \text{ also } v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 a_i\right) = 2\delta_1 + f'_1 = v(f_1^2 a_1)$$

b) $\exists m \in \mathbb{N}$ maximale Anzahl gleich Elemente in $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also
 $s(\mathcal{L}) \geq m$. Dann ist $n \leq m$ und somit $\sum_{i=1}^n b_i^2 \neq 0$

Also ist ebenfalls $v\left(\sum_{i=1}^n f_i^2 a_i\right) = v(f_1^2 a_1)$

Ausgehend von einer geordneten abelschen Gruppe Γ kann man also ein Hilbertscher Raum (H, Φ) konstruieren, so, dass Φ nicht ausgeartet ist und C.S. erfüllt. Dann ist für einen solchen Raum $L_c = L_s$? Sei (nach I₁) $\Gamma = \nu(L) \subset \bigcup_{\sigma \in I} HR_\sigma$ für geeignete Untergruppen R_σ von R . Gemäht soll gezeigt werden, dass die Hypothesen für ein $\nu(\lambda) = (\gamma_\sigma)_{\sigma \in I}$, $\lambda \in L$ äquivalent, dass aber nur für Beschränkungsgruppen Γ , die noch folgende Bedingungen erfüllen:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \in I, \forall \gamma = (\gamma_\sigma)_{\sigma \in I} \in \Gamma \text{ gilt } (\gamma_\sigma)_{\sigma \in I} \in \Gamma \text{ wo} \\ \gamma_\sigma = \begin{cases} \gamma_\sigma, & \text{für } \sigma < \tau \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array} \right.$$

(**) für $\gamma = (\gamma_\sigma)_{\sigma \in I} \in \Gamma$ und $\gamma_\sigma = 2\lambda_\sigma$, $\lambda_\sigma \in R_\sigma \forall \sigma \in I$ ist auch $\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I} \in \Gamma$

(vgl. [2], wo (*) ebenfalls voraussetzt wird) Eine solche Beschränkungsgruppe Γ heißt gesättigt.

Bemerkung. Falls Γ ein volles Halbprodukt ist, sind die Aussagen (*), (**) erfüllt. Im folgenden werden (mit Annahme von Lemma 17) die Äquivalenzbedeutung halber die Beweis nur skizziert. Führt für volle Halbprodukte Γ , obwohl es schon für gesättigte Γ gilt.

Um den Begriff des Typs eines Zahl zu formulieren werde in $\mathbb{I}_2$ zuerst eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ gewählt mit gewissen Eigenschaften. Wegen (*) kann man aus dieser Folge oft A seitens Folgerungen stellen.

Sei $E_n = (E_\sigma^{(n)})_{\sigma \in I}$ mit $\sigma_n := \min \text{supp}(E_n)$. Dann soll für $n > 0$ gelten:

(10) $E_{\sigma_n}^{(n)} > 0 \forall n$, $E_\sigma^{(n)} = 0 \forall \sigma < \sigma_n, \forall n$; $E_{\sigma_n}^{(n)} = 1$, falls $R_{\sigma_n} \cong \mathbb{Z}$;
 $\sigma_{n+1} < \sigma_n \forall n$, nebst den alten Folgerungen $\forall \gamma \in \Gamma$
 existiert $n_\gamma \in \mathbb{N}$ mit $E_n > \gamma \forall n \geq n_\gamma$ und $E_0 := 0, \zeta_1 + \max I$

Lemma 17 Sei $x \neq 0$ in E mit $\text{Typ}(x) = n \in \mathbb{N}_0$. Sei $\lambda(x) = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I}$
 $\lambda(x) \not\equiv 0 \pmod{2\Gamma}$ und $\hat{\sigma} = \min \text{supp}(\lambda(x))$
 Dann existiert $\sigma_* \geq \hat{\sigma}$ in I mit den Eigenschaften
 i) $2\lambda_\sigma \neq 0 \pmod{2\Gamma} \forall \sigma < \sigma_*$, $2\lambda_{\sigma_*} = 0$
 ii) $\sigma_{n+1} \leq \sigma_* < \sigma_n$, falls $n \geq 1$
 $\sigma_1 \leq \sigma_*$, falls $n = 0$

Beweis:

Nehmen die Voraussetzung, dass $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in I} \not\equiv 0 \pmod{2\Gamma}$ ist
 $\{\sigma \in \text{supp}(\lambda(x)) \mid 2\lambda_\sigma \in R_\sigma\} \neq \emptyset$, also existiert $\sigma_0 = \min\{\sigma \in \text{supp}(\lambda(x)) \mid 2\lambda_\sigma \in R_\sigma\}$

Nehmen (*) und (**) ist also $\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I}$ mit

$$\lambda_\sigma = \begin{cases} -\frac{\beta_\sigma}{2} & , \text{ für } \sigma < \sigma_0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad \text{in } \Gamma$$

Berechne $2\lambda + \beta$, wo $\beta = (\beta_\sigma)_{\sigma \in I}$ $2\lambda + \beta \neq 0$, da sonst $\beta \equiv 0 \pmod{2\Gamma}$

Falls $2\beta + \beta < 0$, ist mit $\tilde{\lambda} = -\lambda \cdot \beta$ $2\tilde{\lambda} + \beta > 0$ und

$\min \text{supp}(2\tilde{\lambda} + \beta) = \min \text{supp}(2\lambda + \beta) = \sigma_*$ sowie $2\lambda_{\sigma_*} + \beta_{\sigma_*} > 0$

Also obdA $2\lambda + \beta > 0$.

$\text{Typ}(x) = n \Rightarrow E_n \leq 2\lambda + \beta$, also $\sigma_* \leq \sigma_n$, falls $n \geq 1$

1. Fall: $2\lambda + \beta \geq E_{n+1}$

$$\Rightarrow \sigma_* \leq \sigma_{n+1}$$

$\Rightarrow \exists \delta \in \Gamma$ mit $E_n \leq 2(\delta + \lambda) + \beta < E_{n+1}$ (nach Typabschätzung)

Sei $\tilde{\sigma} = \min \text{supp}(2\delta + 2\lambda + \beta)$ (existiert da $\beta \not\equiv 0 \pmod{2\Gamma}$)

$\Rightarrow \tilde{\sigma} \leq \sigma_*$ (nach Wahl von σ_*) Weiter ist $\sigma_{n+1} \leq \tilde{\sigma}$

$\Rightarrow \sigma_{n+1} \leq \tilde{\sigma} \leq \sigma_* \leq \sigma_{n+1}$, also $\sigma_* = \sigma_{n+1}$

2. Fall: $2\lambda + \beta < E_{n+1}$

$$\Rightarrow \sigma_* \geq \sigma_{n+1}$$

Also ist jetzt: $\sigma_{n+1} \leq \sigma_* \leq \sigma_n$, falls $n \geq 1$ und $\sigma_1 \leq \sigma_*$, falls $n = 0$

Zeige: $\sigma_* = \sigma_n$ ist unmöglich für ein $n \geq 1$

Annahme $\exists n \geq 1$ mit $\sigma_* = \sigma_n$

1. Fall: R_{σ_n} ist dicht in $\mathbb{R}$

Sege $a = \frac{-(\gamma_{\sigma_*} + 2\beta_{\sigma_*})}{2}$, $b = \frac{E_{\sigma_n}^{(n)} - (\gamma_{\sigma_*} + 2\beta_{\sigma_*})}{2} \in \mathbb{R}$, also $a < b$ in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists c \in R_{\sigma_n}$ mit $a < c < b$

$\Rightarrow -(\gamma_{\sigma_*} + 2\beta_{\sigma_*}) < 2c < E_{\sigma_n}^{(n)} - (\gamma_{\sigma_*} + 2\beta_{\sigma_*})$

Nach Wahl von R_{σ} in I_1 existiert $\delta' \in \Gamma$, $\delta' - (\delta'_\sigma)_{\sigma \in I}$ mit $\delta'_* = c$.

$\Rightarrow \delta'' = (\delta''_\sigma)_{\sigma \in I}$ mit $\delta''_\sigma = \begin{cases} \delta'_\sigma & \text{für } \sigma < \sigma_* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist in Γ nach (*).

Betrachte $\{\sigma' \in \text{supp}(\delta' - \delta'') \mid \sigma' > \sigma_*\}$:

Fall A. $\{\dots\} = \emptyset$

$\Rightarrow \delta'_\sigma - \delta''_\sigma = 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_*$. Sege $\delta := \delta' - \delta'' \Rightarrow \delta_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \sigma_* \\ c & \text{für } \sigma = \sigma_* \end{cases}$

Fall B. $\{\dots\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \kappa = \min\{\dots\}$, also $\kappa > \sigma_*$

$\delta := (\delta_\sigma)_{\sigma \in I}$ mit $\delta_\sigma = \begin{cases} \delta'_\sigma - \delta''_\sigma & \text{für } \sigma < \kappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist in Γ nach (*).

Zeige: $\delta_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma \neq \sigma_* \\ c & , \sigma = \sigma_* \end{cases}$

$\sigma < \sigma_* \Rightarrow \sigma < \kappa \Rightarrow \delta_\sigma = \delta'_\sigma - \delta''_\sigma = 0$

$\sigma > \sigma_* \Rightarrow$ entweder $\sigma \geq \kappa$, also $\delta_\sigma = 0$, oder $\sigma_* < \sigma < \kappa$ dann ist
also $\delta'_\sigma - \delta''_\sigma = 0$ (nach Wahl von κ .)

$\sigma = \sigma_* \Rightarrow \sigma < \kappa \Rightarrow \delta_\sigma = \delta'_\sigma - \delta''_\sigma = c - 0 = c$

In beiden Fällen gilt für δ

$2(\delta_\sigma + \beta_\sigma) + \gamma_\sigma = \begin{cases} 0 & , \text{falls } \sigma < \sigma_* \\ 2(c + \beta_{\sigma_*}) + \gamma_{\sigma_*} & , \text{falls } \sigma = \sigma_* \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$ (* steht für "ignoriert eine Zeile")

wobei $0 < 2c + 2\beta_{\sigma_*} + \gamma_{\sigma_*}$ und $2c + 2\beta_{\sigma_*} + \gamma_{\sigma_*} - E_{\sigma_n}^{(n)} < 0$
 also: $0 < 2(\delta + \beta) + \gamma < \varepsilon_n$. Widerspruch zu $\text{Typ}(x) = n$

Nach I_1 genügt es, noch den folgenden Fall zu betrachten

2. Fall: $R_{\sigma_n} \cong \mathbb{Z}$

Also ist auch Voraussetzung $E_{\sigma_n}^{(n)} = 1$

$2\beta_{\sigma_*} + \gamma_{\sigma_*} = 2m+1$ für ein $m \geq 0$ in $\mathbb{Z}$, da $2 + \gamma_{\sigma_*}$ und $2\beta_{\sigma_*} + \gamma_{\sigma_*} > 0$
 Betrachte $\{\sigma' \in \text{supp}(2\beta + \gamma) \mid \sigma' > \sigma_*\}$

A) $\{\dots\} = \emptyset$

$\Rightarrow 2\beta_{\sigma'} + \gamma_{\sigma'} = 0 \quad \forall \sigma' > \sigma_*$ und $2\beta_{\sigma_*} + \gamma_{\sigma_*} - E_{\sigma_n}^{(n)} = 2m$

Wähle $\tilde{\sigma} > \sigma_*$ beliebig sowie $\delta_{\tilde{\sigma}} < 0$ in $R_{\tilde{\sigma}}$. Nach (*) ist $\delta = (\delta_{\sigma'})_{\sigma' \in I}$

mit $\delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' > \sigma_* \text{ und } \sigma' \neq \tilde{\sigma} \\ -m & , \sigma' = \sigma_* \\ \delta_{\tilde{\sigma}} & , \sigma' = \tilde{\sigma} \end{cases} \quad \text{in } \Gamma$

$\Rightarrow 2(\beta + \delta) + \gamma > 0$ und $2\beta_{\delta} + 2\delta_{\delta} + \gamma_{\delta} - E_{\sigma_n}^{(n)} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \tilde{\sigma} \\ 2\delta_{\tilde{\sigma}} & , \sigma' = \tilde{\sigma} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$

also $2\beta + 2\delta + \gamma < \varepsilon_n$. Widerspruch zu $\text{Typ}(x) = n$

B) $\{\dots\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} = \min \{\dots\}$, also $\tilde{\sigma} > \sigma_*$

Dann (*) existiert $\delta \in \Gamma$ mit $\delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' > \sigma_* \text{ und } \sigma' \neq \tilde{\sigma} \\ -m & , \sigma' = \sigma_* \\ \delta_{\tilde{\sigma}} & , \sigma' = \tilde{\sigma} \end{cases}$

wobei $\delta_{\tilde{\sigma}} \in R_{\tilde{\sigma}}$ so gewählt sei, dass $2\delta_{\tilde{\sigma}} + 2\beta_{\tilde{\sigma}} + \gamma_{\tilde{\sigma}} < 0$.
 Es gilt auch mit der gleichen Art wie unter A) einen Widerspruch zu $\text{Typ}(x) = n$

Behauptung: Für $x \in E$ mit $N(x) \neq 0$ (mod 2Γ), $\sigma_{m+1} \in \sigma_* < \sigma_n$

(bzw. $\sigma_1 \leq \sigma_*$), wo σ_* die erste Index ν mit $2 + (N(x))_{\nu}$ in R_{ν} , ist
 $n = \text{Typ}(x)$ (bzw. $\text{Typ}(x) = 0$), da $N(x)$ auf jedem Fall einen Typ

hat und φ_* eindeutig bestimmt ist

zum Schluss muss noch geprüft werden, ob $\tilde{H}$ einen kleinsten Körper $(\tilde{K}, \nu, \Gamma)$, der vollständig ist und Λ erfüllt, und $\tilde{H} = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{K}$, der Folgenraum $H = \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \alpha_i < \infty\}$ ebenfalls vollständig ist

Lemma 18 Falls (H, Φ) C.S. erfüllt, ist H vollständig.

Beweis: (Nämi)

zunächst wird eine Topologie ε auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definiert: Für $y \in \Gamma$ sei

$$\tilde{U}_y := \{(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \nu(\xi_i^2 \alpha_i) > y \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

$\Rightarrow$ Mit $\{\tilde{U}_y \mid y \in \Gamma\}$ als Nullumgebungsbasis wird $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zu einer topologischen (additiven) Gruppe

Der Beweis des Lemmas erfolgt jetzt in drei Schritten

1. Zeige: H ist abgeschlossen in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

2. Zeige: $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist vollständig

3. Zeige: $\forall y \in \Gamma$ ist $\tilde{U}_y \cap H = \{x \in H \mid \nu(x) > y\}$ (also stimmt τ_H mit der durch (ν, Φ) gegebenen Topologie auf H überein).

1. Sei $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \bar{H}$. Zeige: $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \alpha_i$ existiert in $\mathbb{K}$ Sei $y \in \Gamma$

$\Rightarrow \exists y \in \tilde{U}_y$ mit $x + y \in H$, $y = (\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i + \eta_i)^2 \alpha_i$ existiert in $\mathbb{K}$ und $\nu(\eta_i^2 \alpha_i) > y \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists n_y$ so, dass $\nu((\xi_i + \eta_i)^2 \alpha_i) > y \quad \forall i \geq n_y$

Es ist aber $\xi_i^2 \alpha_i = (\xi_i + \eta_i)^2 \alpha_i + \eta_i^2 \alpha_i - 2(\xi_i + \eta_i)\eta_i \alpha_i$

$\Rightarrow \nu(\xi_i^2 \alpha_i) \geq \min \{ \nu((\xi_i + \eta_i)^2 \alpha_i), \nu(\eta_i^2 \alpha_i), \nu((\xi_i + \eta_i)\eta_i \alpha_i) \}$

Für $i \geq n_y$ ist $2\nu((\xi_i + \eta_i)\eta_i \alpha_i) = \nu((\xi_i + \eta_i)^2 \alpha_i) + \nu(\eta_i^2 \alpha_i) > 2y$

$\Rightarrow \nu(\xi_i^2 \alpha_i) > y \quad \forall i \geq n_y$

Also ist $(\xi_i^2 \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$, also existiert $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \alpha_i$

2. Sei $(x_r)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $x_r = (\xi_n^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$

Zeige: $(\xi_i^{(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{K} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Sei $i_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, $\mu \in \Gamma$ Wähle $\varepsilon = 2\mu + v(\alpha_{i_0})$

$\Rightarrow \exists n_\mu$ mit $x_r - x_s \in \tilde{U}_\varepsilon \quad \forall r, s \geq n_\mu$

$\Rightarrow v((\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i) > \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall r, s \geq n_\mu$

$\Rightarrow v(\xi_{i_0}^{(r)} - \xi_{i_0}^{(s)}) > \mu \quad \forall r, s \geq n_\mu$

Da L vollständig ist, existieren $\xi_i := \lim_{r \rightarrow \infty} \xi_i^{(r)} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Zeige: für $x := (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in L^{\mathbb{N}}$ ist $x = \lim_{r \rightarrow \infty} x_r$

Sei $\mu \in \Gamma$. Dann existiert ein $r_\mu \in \mathbb{N}$ mit $x_r - x_s \in \tilde{U}_\mu \quad \forall r, s \geq r_\mu$.

$\Rightarrow v((\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i) > \mu \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall r, s \geq r_\mu$

Sei $s \geq r_\mu$ beliebig. Zeige $v((\xi_i - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i) > \mu \quad \forall i \in \mathbb{N}$ (d.h. $x - x_s \in \tilde{U}_\mu$)

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig $(\xi_i - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i = \lim_{r \rightarrow \infty} (\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i$, da L topologischer Körper

1. Fall: $(\xi_i - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i = 0 \quad \rightarrow$ Behauptung klar

2. Fall: $(\xi_i - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i \neq 0 \quad \Rightarrow \exists r_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$v(\xi_i - \xi_i^{(r)})^2 \alpha_i = v((\xi_i^{(r)} - \xi_i^{(s)})^2 \alpha_i) \quad \forall r \geq r_0$$

insbesondere für $r \geq \max\{r_0, r_\mu\}$ ist also $v((\xi_i - \xi_i^{(r)})^2 \alpha_i) > \mu$

3. "C": Sei $x = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{U}_\mu \cap H$. oBdA $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq 0$

$\Rightarrow v(\xi_i^2 \alpha_i) > \mu \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow N(x) = v(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \alpha_i) = v(\sum_{i=1}^{n_0} \xi_i^2 \alpha_i) \geq \min_{1 \leq i \leq n_0} \{v(\xi_i^2 \alpha_i)\}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow N(x) > \mu$

"D": Sei $N(x) > \mu$ für ein $x \in H$. oBdA $x \neq 0$

$\Rightarrow v(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i) > \mu$ für $n \geq n_0$, n_0 geeignet

$\Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} \{v(\xi_i^2 \alpha_i)\} > \mu \quad \forall n \geq n_0$ nach Lemma 15

$\Rightarrow v(\xi_i^2 \alpha_i) > \mu \quad \forall i \in \mathbb{N}$, also $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{U}_\mu$

Zusammenfassung

Ihm unsern Raum mit $L_C = L_S$ zu konstruieren, kann man so folgt vorgehen

1. Wähle für Γ eine geeignete Untergruppe eines Halpprodukts HR_0
 $\sigma \in \Gamma$

wo R_σ Mutationsgruppen von $R \quad \forall \sigma \in I$

- I nach unten unbeschränkt

- $|I/2\Gamma| \geq \aleph_0$

- es existiert eine nach links totale Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I
 oBdA $\sigma_{n+1} < \sigma_n \quad \forall n$ und $\sigma_1 \neq \max I$ (falls dieses existiert)

2. Wähle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ , $\varepsilon_n = (\varepsilon_\sigma^{(n)})_{\sigma \in I}$ wo folgt

falls $R_{\sigma_n} = \mathbb{Z}$, setze $\varepsilon_\sigma^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sigma = \sigma_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

falls R_{σ_n} dicht in R , setze $\varepsilon_\sigma^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_{\sigma_n}^{(n)} > 0 & \text{in } R_{\sigma_n}, \sigma = \sigma_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. Wähle $(j_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge in Γ_+ so, dass gilt:

- $j_i \equiv j_j^* \pmod{2\Gamma} \Rightarrow j_i = j_j^* \quad (\Delta)$

- für jedes i mit $j_i \neq 0 \pmod{2\Gamma}$ werde mit σ_{i*} der erste Index bezeichnet mit $2j_{\sigma_{i*}}^* \leq j_i$ (vgl. Lemma 17)

Dann soll gelten: Höchstens für endlich viele unter den σ_{i*} ist $\sigma_{n+1} \leq \sigma_{i*}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$

- Höchstens für endlich viele i ist $j_i \equiv 0 \pmod{2\Gamma}$

4. Wähle einen kommutativen Körper k , welcher formal reell

oder mit geordneter Skala (in Abhängigkeit von $(j_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nach Lemma 16) so, dass also mit der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wo $a_i = X^{j_i}$

$(a_i \in K = k(X)^{\Gamma_+})$ gebaute Folgenraum H zusammen mit der gehörigen Form $\Phi \in S$ erfüllt

Dann gilt:

- (H, Φ) ist ein nicht ausgeglichener bilinearer Raum über dem bewerteten Körper (K, v, Γ) K ist vollständig und erfüllt A_* (wegen 1.)

- Φ erfüllt CS
- H ist vollständig (nach Lemma 18)
- Für $e_i := (\delta_j^i)_{j \in \mathbb{N}}$ (Kronecker-Symbol) gilt: $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine maximale orthogonale Familie in (H, Φ) mit $N(e_i) = j_i \forall i \in \mathbb{N}$. Also haben höchstens j_i endlich viele unter den e_i denselben Typ (nach Lemma 17 und 8)

Damit ist nach Satz 2 $L_C = L_S$

Bemerkung: Die Wahl der j_i in Γ statt in Γ' sowie die Bedingung (A) sind keine schwächenden Einschränkungen, da man diese Eigenschaften sofort durch Streichen der e_i erreichen kann.

III. Cliffordalgebren gewisser hilbertscher Räume

III₁ Cliffordalgebren und ihre Komplettierungen und bewertete Schiefkörper bei gewissen hilbertschen Räumen

Sei Γ eine geordnete Untergruppe eines Halbproduktes $H R_\Phi$ ($\Phi \in I$) (vgl. II₅), (L, ν, Γ) bewerteter Körper mit $\nu(L) = \Gamma$, vollständig und erfüllt A_1 , also $k \neq 2$. Wende sei Γ so gewählt, dass für eine Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ (mit den Eigenschaften (10) aus II₅) und für einen nicht ausgeartetem, quadratischen Raum (E, Φ) gilt (E, Φ) erfüllt CS, $L_C = L_S$ und es existiert eine maximale orthogonale Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in E mit der Eigenschaft $\sigma_i \neq \sigma_j^*$ für $i \neq j$, so σ_i^* der erste Index σ mit $2 \nmid (N(e_i))_\sigma$ in R_Φ . (E, Φ) existiert nach II₅)
Schließlich sei $N(e_i) \neq 0 \pmod{2\Gamma} \forall i \in \mathbb{N}$

ObdA $\sigma_i^* = \min \text{supp}(N(e_i)) \forall i \in \mathbb{N}$ (diese Situation ist durch Streichen der e_i erreichbar)

In diesem Kapitel soll nun eine Vermutung von pos bewiesen werden, dass nämlich $C(E)$ ein Körper ist

Im allgemeinen ist diese Aussage nicht richtig:

Beisp. Sei (E, Φ) quadratischer Raum über $\mathbb{R}$ mit $\dim E > 2$
 $\Rightarrow C(E)$ ist kein Körper

Seien e_1, e_2, e_3 paarweise orthogonale Vektoren in E mit
 $\Phi(e_i, e_i) = \pm 1 \quad \forall i$

1. Fall: $\exists i_0$ mit $\Phi(e_{i_0}, e_{i_0}) = 1$. Setze $x := e_{\emptyset} + e_{i_0} \in C(E)$

$$\Rightarrow x^2 = e_{\emptyset} + 2e_{i_0} + \Phi(e_{i_0}, e_{i_0})e_{\emptyset} = 2(e_{\emptyset} + e_{i_0}) = 2x$$

$$\Rightarrow x(x - 2e_{\emptyset}) = 0 \quad \text{wobei } x \neq 0 \text{ und } x - 2e_{\emptyset} \neq 0$$

2. Fall: $\Phi(e_i, e_i) = -1 \quad \forall i$. Setze $x := e_1 + e_{\{2,3\}}$, $y := 2(e_{\emptyset} + e_{\{1,2,3\}})$,

$$\text{also } x, y \neq 0. \text{ Dann ist } xy = 2(e_1 + (-1)e_{\{2,3\}} + e_{\{2,3\}} + (-1)e_1) = 0$$

Also hat $C(E)$ Nullteiler verschieden von Null.

Sei $E_0 := \mathcal{H}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$; also $E = \bar{E}_0$, da $L_C = L_S$. Betrachte nun die beiden Algebren $C(E)$ und $C(E_0)$. Es heißt jetzt in [10], dass man Φ erweitern kann zu einer symmetrischen Bilinearform auf $C(E)$ bzw. $C(E_0)$, indem man definiert:

Für $x, y \in C(E)$ beliebig wähle man ein Orthogonalsystem $g_1, \dots, g_n$ in E mit $x = \sum \xi_H g_H$, $y = \sum \eta_H g_H$, $H \subset \{1, \dots, n\}$

$$\Phi(x, y) := \sum_{H \subset \{1, \dots, n\}} \xi_H \eta_H \prod_{i \in H} \Phi(g_i, g_i)$$

Dabei sind $(C(E), \Phi)$ und $(C(E_0), \Phi)$ wieder nicht assoziiert. $C(E_0)$ besitzt nun eine Eigenschaft, die sehr wesentlich ist für die folgenden Rechnungen.

Lemma 19 $x, y \in C(E_0) \setminus \{0\}$ und $x \perp y \Rightarrow N(x) \neq N(y)$

Berechnungen 1. Zu beweisen Schreibweise bei Summationen "über einige H " sei $\epsilon: \{H \subset \mathbb{N} \mid |H| < \infty\} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Für $x \in C(E_0)$ ist also $x = \sum_{\epsilon(H) \geq 1} \xi_H e_H$ für geeignetes $\epsilon \in \mathbb{N}$

$$2. \prod_H := \prod_{i \in H} \Phi(e_i, e_i)$$

Revers von Lemma 19

a) Zeige zunächst $v(\sum_{\epsilon(H)=1}^n \xi_H^2 \overline{\Pi}) = \min_{\epsilon(H) \leq n} \{v(\xi_H^2 \overline{\Pi})\} \quad \forall \xi_H \in \mathcal{L}, \forall n \in \mathbb{N}$

Für $n=1$ ist die Behauptung klar

$$v(\sum_{\epsilon(H)=1}^n \xi_H^2 \overline{\Pi}) = v(\sum_{\epsilon(H)=1}^{n-1} \xi_H^2 \overline{\Pi} + \xi_{H_0}^2 \overline{\Pi}) \quad \text{wo} \quad \epsilon(H_0) = n \quad \text{odda} \quad \xi_{H_0} \neq 0$$

Annahme: $v(\sum_{\epsilon(H)=1}^{n-1} \xi_H^2 \overline{\Pi}) = v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi})$

$$\Rightarrow \min_{\epsilon(H) \leq n-1} \{v(\xi_H^2 \overline{\Pi})\} = v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi}) \quad \text{nach Induktionsannahme}$$

Sei $v(\xi_{H_1}^2 \overline{\Pi}) = \min_{\epsilon(H) \leq n-1} \{v(\xi_H^2 \overline{\Pi})\}$ Dann ist $2v(\xi_{H_1}) + v(\overline{\Pi}) = 2v(\xi_{H_0}) + v(\overline{\Pi})$

Für $\lambda_i = \lambda(e_i)$ hat man also $2\lambda + \sum_{i \in H_1} \lambda_i = \sum_{i \in H_0} \lambda_i$ für ein $\lambda \in \Gamma$
 ododa $H_1 \cap H_0 = \emptyset$ (sonst in obiger Gleichung $\lambda, \lambda_i \in H_1 \cap H_0$ subtrahieren)

Sei $\sigma_{i*} := \min_{i \in H_1 \cup H_0} \sigma_{i*}, \quad \lambda_i = (\lambda_i \sigma)_{\sigma \in I} \in HR_{\sigma}$

$$\Rightarrow \lambda_i \sigma_{i*} = 0 \quad \forall i \neq i_0, i \in H_1 \cup H_0, \text{ da } \sigma_{i*} \neq \sigma_{i_0*} \text{ für } i \neq i_0 \text{ und}$$

$$\sigma_{i_0*} = \min \operatorname{supp}(\lambda(e_i)) \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{mit } \lambda = (\lambda \sigma)_{\sigma \in I} \text{ ist also } 2\lambda \sigma_{i_0*} + \lambda_{i_0} \sigma_{i_0*} = 0, \text{ falls } i_0 \in H_1$$

$$\text{odda } 2\lambda \sigma_{i_0*} = \lambda_{i_0} \sigma_{i_0*}, \text{ falls } i_0 \in H_0$$

Also $2 \mid \lambda_{i_0} \sigma_{i_0*}$ Widerspruch

Also ist $v(\sum_{\epsilon(H)=1}^{n-1} \xi_H^2 \overline{\Pi}) \neq v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi})$

$$\Rightarrow v(\sum_{\epsilon(H)=1}^n \xi_H^2 \overline{\Pi}) = \min_{\epsilon(H) \leq n-1} \{ \min_{\epsilon(H) \leq n-1} \{v(\xi_H^2 \overline{\Pi})\}, v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi}) \} = \min_{\epsilon(H) \leq n} \{v(\xi_H^2 \overline{\Pi})\}$$

b) Seien $x, y \in C(E_0) \setminus \{0\}$ mit $x \perp y, x = \sum_{\epsilon(H)=1}^n \xi_H e_H, y = \sum_{\epsilon(H)=1}^n \eta_H e_H$
 (ododa Summanden von x und y sind disjunkt)

Annahme: $\lambda(x) = \lambda(y)$

$$\Rightarrow v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi}) = v(\eta_{H_0}^2 \overline{\Pi}) \quad \text{für } H_0, H_1 \text{ geeignet nach a)}$$

Mit derselben Überlegung wie unter a) folgt wegen $\sigma_{i*} \neq \sigma_{i_0*}$ für $i \neq i_0$

$$\left. \begin{aligned} H_0 = H_1 \text{ und } v(\xi_{H_0}^2 \overline{\Pi}) &< v(\xi_H^2 \overline{\Pi}) \quad \forall H \neq H_0 \\ v(\eta_{H_0}^2 \overline{\Pi}) &< v(\eta_H^2 \overline{\Pi}) \quad \forall H \neq H_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(\xi_{H_0} \eta_{H_0} \overline{\Pi}) < v(\xi_H \eta_H \overline{\Pi}) \quad \forall H \neq H_0$$

Wegen $x \perp y$ ist also $\sum_{H \in \mathcal{H}} \xi_H \eta_H \overline{\pi} = 0$

$\Rightarrow v(\xi_{H_0} \eta_{H_0} \overline{\pi}) = v(\sum_{H \neq H_0} \xi_H \eta_H \overline{\pi}) \geq \min_{H \neq H_0} \{v(\xi_H \eta_H \overline{\pi})\}$ im Widerspruch zu der oben erhaltenen Ungleichung

Lemma 20 In $C(E_0)$ ist C.S. erfüllt

Beweis

Verwende Lemma 14: i) Für $x, y \in C(E_0) \setminus \{0\}$ mit $x \perp y$ ist nach Lemma 19 $N(x) \neq N(y)$, also $N(x+y) = v(\phi(x, x), \phi(y, y)) = \min\{N(x), N(y)\}$
ii) Sei $x \neq 0$ in $C(E_0)$, $x = \sum_H \xi_H e_H$ obdA alle ξ_H in dieser Summe verschieden von Null.

1. Fall: $x = \xi_{H_0} e_{H_0}$ für ein H_0 . $\Rightarrow \phi(x, x) = \xi_{H_0}^2 \overline{\pi} \neq 0$

2. Fall: $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 = \xi_{H_0} e_{H_0} \neq 0$ für ein H_0 , $x_2 = \sum_{H \neq H_0} \xi_H e_H \neq 0$

Annahme: $\phi(x, x) = 0$

$\Rightarrow -\xi_{H_0}^2 \overline{\pi} = \sum_{H \neq H_0} \xi_H^2 \overline{\pi}$, also $N(x_1) = N(x_2)$ wobei $x_1 \perp x_2$ und $x_1, x_2 \neq 0$
Widerspruch zu Lemma 19

Lemma 21 $\forall x, y \in C(E_0)$ gilt $N(xy) = N(x) + N(y)$

Beweis:

obdA $x \neq 0$ (sonst ist die Behauptung klar) Verwende Induktion nach der Anzahl von Null verschiedene Summanden in $x = \sum_H \xi_H e_H$.

Bezeichnung: Für $H, R \subset \mathcal{H}$ sinnvoll ist $e_H e_R = \pm \prod_{i \in H \cap R} \phi(e_i, e_i) e_{H+R}$
Schreibe kurz $\varepsilon_{H,R}$ für das Vorzeichen.

Annahme: $x = \xi_H e_H$ für ein H , $y = \sum_R \eta_R e_R$ beliebig

$\Rightarrow N(\xi_H e_H \cdot y) = 2v(\xi_H) + N(\sum_R \eta_R \varepsilon_{H,R} \prod_{i \in H \cap R} \overline{\pi} e_{H+R})$

Für $R \neq S$ gilt: $H+R \neq H+S$

Also ist $e_{H+R} \perp e_{H+S}$ für $R \neq S$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow N(\xi_H e_H y) &= 2v(\xi_H) + \min_R \{ N(\eta_R \xi_{H,R} \prod_{H \cap R} e_{H+R}) \} \quad \text{wegen C.S.} \\
&= 2v(\xi_H) + \min_R \{ 2v(\eta_R) + v(\prod_{H \cap R} \prod_{H+R}) \} \\
&= 2v(\xi_H) + \min_R \{ 2v(\eta_R) + v(\prod_H) + v(\prod_R) \} \\
&= N(\xi_H e_H) + \min_R \{ N(\eta_R e_R) \} \\
&= N(\xi_H e_H) + N(y) \quad \text{noch C.S.}
\end{aligned}$$

Sei $x = \sum \xi_H e_H$ "von der Länge n ", H_0 eine der vorkommenden Indizes. Setze $x_1 = \sum_{H \neq H_0} \xi_H e_H$, $x_0 = \xi_{H_0} e_{H_0}$, also $x_1, x_0 \neq 0$ und $x_1 \perp x_0$. Sei $y \in C(E_0)$ beliebig.

$\Rightarrow N(x, y) = N(x_1) + N(y)$ nach Induktionsvoraussetzung

$N(x_0 y) = N(x_0) + N(y)$ nach Bemerkung

Nach Lemma 19 ist $N(x_1) \neq N(x_0)$, also $N(x, y) \neq N(x_0 y)$

$\Rightarrow N(xy) = N(x_1 y + x_0 y) = \min \{ N(x_1 y), N(x_0 y) \}$, da C.S. erfüllt ist (vgl. Lemma 2)

1. Fall: $N(x_1 y) > N(x_0 y)$

$\Rightarrow N(x_1) > N(x_0)$, also $N(xy) = N(x_0 y) = N(x_0) + N(y) = N(x) + N(y)$

2. Fall: $N(x_1 y) < N(x_0 y)$

$\Rightarrow N(x_1) < N(x_0)$, also $N(xy) = N(x_1 y) = N(x_1) + N(y) = N(x) + N(y)$

Bemerkung Es gilt sogar allgemeiner. Sei (E, Φ) ein Raum $\mathcal{W}$ im Kapitel I mit $E_0 = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ wo $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine maximale orthogonale Familie bildet in E so, dass in $C(E_0)$ C.S. erfüllt ist. Sei $\dim E \geq 2$. Dann ist $N(xy) \geq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in C(E_0)$, also $(C(E_0))$ eine topologische Algebra (vgl. I₃)

Sei $\widetilde{C(E_0)}$ die Komplettierung von $C(E_0)$ bei dieser Topologie. Nach Lemma 4 kann man Φ zu $\tilde{\Phi}$ auf $\widetilde{C(E_0)}$ fortsetzen so, dass $\tilde{\Phi}$ ein Isomorphismus ist und C.S. erfüllt. Daraus stimmt die Topologie ab

Komplettierung überein mit jens, da durch $(\nu, \tilde{\Phi})$ auf $\widetilde{C(E_0)}$ gegeben wird. Auf $\widetilde{C(E_0)}$ kann man eine Multiplikation definieren durch: Seien $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in \widetilde{C(E_0)}$ und $x_n, y_n \in C(E_0) \forall n$

$$x \cdot y := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n$$

$\Rightarrow \widetilde{C(E_0)}$ ist eine Algebra. Setze $\tilde{N}(x) := \nu(\tilde{\Phi}(x, x))$ für $x \in \widetilde{C(E_0)}$

Lemma 2.2 Für $x, y \in \widetilde{C(E_0)}$ gilt $\tilde{N}(xy) = \tilde{N}(x) + \tilde{N}(y)$

Beweis:

Seien $x, y \in \widetilde{C(E_0)}$, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mit $x_n, y_n \in C(E_0) \forall n$

1. Fall: $xy \neq 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{N}(xy) = N(x_n y_n), \tilde{N}(x) = N(x_n), \tilde{N}(y) = N(y_n) \forall n \geq n_0$

Mit Lemma 2.1 folgt also die Behauptung

2. Fall: $xy = 0$

a) $y = 0 \Rightarrow$ Behauptung richtig

b) $y \neq 0$. Zeige $x = 0$

$y \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{N}(y) = N(y_n) \forall n \geq n_0$

$(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\Rightarrow \forall j \in \Gamma$ existiert $n_j \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n y_n) > j + \tilde{N}(y) \forall n \geq n_j$

Sei $j \in \Gamma$. Wähle $n_j \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_j$ gilt $N(x_n) > j + \tilde{N}(y) - N(y_n)$ nach Lemma 2.1 also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

Mit Hilfe der folgenden Lemmas lässt sich $C(E)$ einbetten in $\widetilde{C(E_0)}$. Verwende für die Formelnungen wieder entsprechende Bezeichnungen für die Polynomformen auf $C(E_0), C(E), \widetilde{C(E_0)}$.

Φ_0 Abbildung von Φ auf $C(E_0)$, $\tilde{\Phi}$ Abbildung von Φ auf $C(E)$ und $\tilde{\tilde{\Phi}}$ Abbildung von $\tilde{\Phi}$ auf $\widetilde{C(E_0)}$.

Lemma 23 Es existiert ein eindeutiges Abbildungshomomorphismus
 $\tilde{\Phi}: C(E) \rightarrow \widetilde{C(E_0)}$ mit $\tilde{\Phi}(\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y) = \tilde{\Phi}(x, y) \quad \forall x, y \in C(E)$.

Beweis

Da $E = \bar{E}_0$, ist für $x \in E$ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mit $x_n \in E_0 \quad \forall n$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in E_0 , also (da $\tilde{\Phi}_0$ Fortsetzung von Φ)
 auch Cauchyfolge in $\widetilde{C(E_0)}$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\widetilde{C(E_0)}$

Definiere $\Psi: E \rightarrow \widetilde{C(E_0)}$ durch $\Psi x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
 in $\widetilde{C(E_0)}$

Ψ wohldefiniert:

Sei $x = \lim x_n = \lim y_n$ in E , $x_n, y_n \in E_0 \quad \forall n$. Sei $u = \lim x_n$ in $\widetilde{C(E_0)}$
 $v = \lim y_n$ in $\widetilde{C(E_0)}$ Sei $\mu \in \Gamma$.

$\Rightarrow \exists n_\mu \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{N}(u - x_n) > \mu$, $\tilde{N}(v - y_n) > \mu$, $N(x_n - y_n) > \mu \quad \forall n \geq n_\mu$

$\Rightarrow \tilde{N}(u - v) = \tilde{N}(u - x_n + x_n - y_n + y_n - v) \geq \min \{ \tilde{N}(u - x_n), \tilde{N}(x_n - y_n), \tilde{N}(y_n - v) \}$
 wegen CS

Da $\tilde{\Phi}$ Fortsetzung von $\tilde{\Phi}_0$, ist $\tilde{N}(x_n - y_n) = N(x_n - y_n)$, also

$\tilde{N}(u - v) > \mu \quad \forall n \geq n_\mu$

$\Rightarrow \tilde{\Phi}(u - v, u - v) = 0$, also $u = v$, da $\tilde{\Phi}$ anisotrop

Ψ linear folgt

Zeige: $(\Psi x)^2 = \Phi(x, x) \in \widetilde{C(E_0)} \quad \forall x \in E$

Sei $x \in E$, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mit $x_n \in E_0 \quad \forall n$, $\Psi x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
 in $\widetilde{C(E_0)}$

Zeige gleichzeitig $(\Delta) \quad \lambda = \lim \lambda_n$ in $E \Rightarrow \lambda \in \widetilde{C(E_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n \in \widetilde{C(E_0)})$

Sei $\mu \in \Gamma$ oBdA $\mu > 0$

$\Rightarrow \exists n_\mu \in \mathbb{N}$ mit $N(\lambda - \lambda_n) > \mu \quad \forall n \geq n_\mu$

$\Rightarrow \tilde{N}(\lambda \in \widetilde{C(E_0)} - \lambda_n \in \widetilde{C(E_0)}) = 2N(\lambda \cdot \lambda_n) + \tilde{N}(\in \widetilde{C(E_0)}) = 2N(\lambda \cdot \lambda_n) > 2\mu > \mu \quad \forall n \geq n_\mu$

$\Rightarrow \Phi(x, x) \in \widetilde{C(E_0)} = (\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n, x_n)) \in \widetilde{C(E_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi(x_n, x_n) \in \widetilde{C(E_0)})$ nach (Δ)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 = (\Psi x)^2$$

Also existiert ein Abbildungshomomorphismus $\bar{\varphi}: C(E) \rightarrow \widetilde{C(E_0)}$ mit $\bar{\varphi}|_E = \varphi$. Zeige: $\bar{\varphi}(\bar{\varphi}x, \bar{\varphi}y) = \bar{\varphi}(x, y) \quad \forall x, y \in C(E)$

Sei $x \in C(E)$. Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_m$ ein Orthogonalsystem in E mit $x = \sum_{H \in \{1, \dots, m\}} \langle x, g_H \rangle g_H$. Da $\bar{\varphi}, \bar{\varphi}$ bilinear und $\dim E < \infty$, genügt es zu zeigen:

$$\bar{\varphi}(\bar{\varphi}g_H, \bar{\varphi}g_H) = \bar{\varphi}(g_H, g_H) \quad \forall H \in \{1, \dots, m\}$$

Sei also $H = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, m\}$. Dann gilt:

a) $g_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ i_n \in E}} g_{i_n}$ mit $g_{i_n} \in E_0$ und $g_{i_n} \perp g_{i_k}$ für $i \neq k, i, k = 1, \dots, r$

nach Kapitel II Lemma 9.

b) $\bar{\varphi}(g_H, g_H) = \prod_{k=1}^r \bar{\varphi}(g_{i_k}, g_{i_k})$ nach Definition von $\bar{\varphi}$

c) Wegen a) und Definition von $\bar{\varphi}_0$ ist in $C(E_0)$

$$\bar{\varphi}_0\left(\prod_{k=1}^r g_{i_k n}, \prod_{k=1}^r g_{i_k n}\right) = \prod_{k=1}^r \bar{\varphi}_0(g_{i_k n}, g_{i_k n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi}(\bar{\varphi}g_H, \bar{\varphi}g_H) = \bar{\varphi}\left(\prod_{k=1}^r \bar{\varphi}g_{i_k}, \prod_{k=1}^r \bar{\varphi}g_{i_k}\right)$$

$$= \bar{\varphi}\left(\prod_{k=1}^r \lim_{n \rightarrow \infty} g_{i_k n}, \prod_{k=1}^r \lim_{n \rightarrow \infty} g_{i_k n}\right) \text{ nach Definition von } \bar{\varphi}$$

$$= \bar{\varphi}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^r g_{i_k n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^r g_{i_k n}\right) \text{ nach Definition der Multiplikation in } \widetilde{C(E_0)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_0\left(\prod_{k=1}^r g_{i_k n}, \prod_{k=1}^r g_{i_k n}\right) \text{ nach Definition von } \bar{\varphi}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^r \bar{\varphi}_0(g_{i_k n}, g_{i_k n})\right) \text{ nach c)}$$

$$= \prod_{k=1}^r \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_0(g_{i_k n}, g_{i_k n}), \text{ da die Multiplikation in } E \text{ stetig ist}$$

$$= \prod_{k=1}^r \bar{\varphi}_0(g_{i_k}, g_{i_k}) \quad , \text{ da } \bar{\varphi} \text{ stetig auf } E \times E$$

$$= \bar{\varphi}(g_H, g_H) \quad \text{nach b)}$$

Bleibt zu zeigen: $\bar{\varphi}$ injektiv

Sei $\bar{\varphi}x = 0 \Rightarrow \forall y \in C(E)$ gilt $0 = \bar{\varphi}(\bar{\varphi}x, \bar{\varphi}y) = \bar{\varphi}(x, y)$

Da Φ nicht ausgeartet, ist also $x=0$

Im folgenden wird nicht mehr unterschieden zwischen $\Phi, \bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}, \tilde{\Phi}$

Mit dem Begriff eines assoziativen $*$ -Körpers aus [6] erhält man nun:

Satz 3 $(C(E), \nu)$ ist ein assoziativer $*$ -Körper, wobei $*$ der Hauptautomorphismus von $C(E)$ ist. Der Restklassenkörper K_0 von $(C(E), \nu)$ ist isomorph zum Restklassenkörper k_0 von (k, ν)

Beweis

1) Zeige: $C(E)$ ist ein Körper

Verwende (F, ϕ) nicht ausgearteter symmetrischer Raum und $C(F)$ nullteilerfrei, dann ist $C(F)$ ein Körper

denn $x \neq 0$ in $C(F) \Rightarrow \exists$ multiplikativ-invertible Teilalgebra A
in $C(F)$ mit $x \in A$

Da auch A nullteilerfrei, folgt: $\exists x^{-1}$ in A

a) Wegen Lemma 2.1 und Φ anisotrop gilt also: $C(E_0)$ ist nullteilerfrei, also $C(E_0)$ Körper

b) Zeige: $\widetilde{C(E_0)}$ ist Körper

Sei $x \neq 0$ in $\widetilde{C(E_0)}$, also $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mit $x_n \in C(E_0) \forall n$ und
obdA $x_n \neq 0 \forall n$

$\Rightarrow \exists x_n^{-1}$ in $C(E_0) \forall n$ nach a)

$N(e\phi) = 0 = N(x_n) + N(x_n^{-1})$ nach Lemma 2.1, also $N(x_n^{-1}) = -N(x_n) \forall n$

Deshalb existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(x) = N(x_n) \forall n \geq n_0$, da $x \neq 0$

Sei $\mu \in \Gamma$ beliebig

$\Rightarrow \exists \eta_\mu \in \mathbb{N}$ mit $N(x_n - x_m) > \mu + 2N(x) \forall n, m \geq \eta_\mu$; obdA $\eta_\mu \geq n_0$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \text{ gilt } N(x_n^{-1} - x_m^{-1}) = N(x_n^{-1}(x_m - x_n)x_m^{-1}) = -N(x_n) + N(x_m - x_n) - N(x_m) \\ = N(x_m - x_n) - 2N(x) > \delta$$

$\Rightarrow (x_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $C(E_0)$

$\Rightarrow$ existiert $z := \lim x_n^{-1}$ in $C(\widetilde{E}_0)$. Dabei ist $zx = xz = 1$, also $z = x^{-1}$ in $C(\widetilde{E}_0)$

c) Nach Lemma 23 ist $C(E) \subset C(\widetilde{E}_0)$, also auch multiplikativ
 $\Rightarrow C(E)$ ist ein Körper

2) Zeige: $N: C(E) \rightarrow N(C(E)) \subset \Gamma$ ist eine $*$ -Bezeichnung

$N(xy) = N(x) + N(y)$ nach Lemma 22

$N(x+y) \geq \min\{N(x), N(y)\}$, da $(C(E), \Phi)$ c.s. erfüllt

$N(x^*) = N(x)$, denn nach Lemma 19 ist $\Phi(x, x) = \Phi(x^*, x^*) \quad \forall x \in C(E)$

(vgl. [10, II, 1, Korollar 5])

3) Sei $A_\nu = \{\lambda \in \mathbb{C} / \nu(\lambda) \geq 0\}$, $M_\nu = \{\lambda \in \mathbb{C} / \nu(\lambda) > 0\}$

$\Phi = \{x \in C(E) / N(x) \geq 0\} \cup \{0\}$, $P = \{x \in C(E) / N(x) > 0\} \cup \{0\}$

also $L_0 = A_\nu / M_\nu$, $K_0 = \Phi / P$ (vgl. [6, § 2])

Zeige: $K_0 \cong L_0$

Man überlegt sich zunächst, dass aufgrund der Anisotropie von Φ $(e_H)_{H \subset \mathbb{C}N}$ eine maximale orthogonale Familie in $C(\widetilde{E}_0)$ ist
endlich

Für $x \in \Phi$ gilt also $x = \sum_{e(H)=1}^{\infty} \xi_H e_H$, da $C(E_0) = L(e_H)_{H \subset \mathbb{C}N}$ endlich sowie
 $C(\widetilde{E}_0) = C(E_0) \supset C(E)$.

$$\Rightarrow N(x) = \min_H \{N(\xi_H e_H)\} =: N(\xi_{H_0} e_{H_0}) = 2\nu(\xi_{H_0}) + \sum_{e \in H_0} N(e_i)$$

Falls $N(x) = 0$, folgt aus Lemma 19, dass $H_0 = \emptyset$, also

$$0 = N(x) = \nu(\xi_\emptyset^2) \text{ ist}$$

$$\Rightarrow \xi_\emptyset \in A_\nu$$

$$\text{Falls } N(x) > 0 : N(\xi_\emptyset e_\emptyset) \geq N(\xi_{H_0} e_{H_0}) > 0$$

$$\Rightarrow \xi_\emptyset \in M_\nu$$

Definition $\varphi: \Phi/\rho \rightarrow A_V/M_V$ durch $\varphi(x+P) = f_\phi + M_V$ wo $f_\phi = \phi(x, e_\phi)$

a) φ ist wohldefiniert

Sei $x+P = y+P$ für $x, y \in \Phi$

$\Rightarrow 0 < N(x-y) = \min_H \{N((f_H - \eta_H)e_H)\} = N((f_{H_0} - \eta_{H_0})e_{H_0})$ für ein festes H_0

1. Fall: $N(x) > 0$

$\Rightarrow N(y) > 0$, also $f_\phi, \eta_\phi \in M_V$

$\Rightarrow \phi(x-y, e_\phi) = f_\phi - \eta_\phi \in M_V$, da M_V ein Ideal, also $f_\phi + M_V = \eta_\phi + M_V$

2. Fall: $N(x) = 0$

$\Rightarrow N(y) = 0$, also $v(f_\phi^2) = 0$ und $v(\eta_\phi^2) = 0$ und wegen Lemma 10 ist

$$v(f_\phi^2) < v(f_H^2 \overline{H}) \quad \forall H \neq \phi, \quad v(\eta_\phi^2) < v(\eta_H^2 \overline{H}) \quad \forall H \neq \phi$$

$$\Rightarrow 0 = v(f_\phi \eta_\phi) < v(f_H \eta_H \overline{H}) \quad \forall H \neq \phi$$

$$\Rightarrow \text{für } H \neq \phi \text{ ist } v((f_H - \eta_H)^2 \overline{H}) \geq \min \{v(f_H^2 \overline{H}), v(\eta_H^2 \overline{H}), v(f_H \eta_H \overline{H})\} > 0$$

Wäre nun $f_\phi - \eta_\phi \notin M_V$, d.h. $v(f_\phi - \eta_\phi) = 0$, dann wäre

$$v((f_\phi - \eta_\phi)^2 \cdot 1) = 0$$

$$\Rightarrow N(x-y) = \min_H \{N((f_H - \eta_H)e_H)\} = N((f_\phi - \eta_\phi)e_\phi) = 0 \quad \text{Widerspruch}$$

Also $f_\phi - \eta_\phi \in M_V$

$$\begin{aligned} b) \varphi((x+P) + (y+P)) &= \varphi((x+y)+P) = \phi(x+y, e_\phi) + M_V = (\phi(x, e_\phi) + M_V) + (\phi(y, e_\phi) + M_V) \\ &= \varphi(x+P) + \varphi(y+P) \end{aligned}$$

also φ additiv

c) φ multiplikativ

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ mit } x_n = \sum_{\ell(H)=1}^n f_H e_H, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ mit } y_n = \sum_{\ell(H)=1}^n \eta_H e_H$$

$$\Rightarrow xy = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \text{ mit } \phi(xy, e_\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n y_n, e_\phi)$$

$$x_n y_n = \sum_{\ell(H)=1}^n \sum_{\ell(R)=1}^n f_H \eta_R e_{H \wedge R} \overline{H \wedge R} e_{H+R}$$

$$\Rightarrow \phi(x_n y_n, e_\phi) = \sum_{\ell(H)=1}^n f_H \eta_H e_{H \wedge H} \overline{H} - f_\phi \eta_\phi + \sum_{\ell(H)=2}^n f_H \eta_H e_{H \wedge H} \overline{H}, \text{ da man sofort}$$

annehmen kann, dass $\ell(\phi) = 1$

zu zeigen ist: $\Phi(xy, e_\phi) + M_V = \xi_\phi \eta_\phi + M_V \quad \text{oder} \quad A \quad xy \neq 0$

1. Fall: $N(x) = N(y) = 0$

Wir nutzen a) hier, man $0 = v(\xi_\phi \eta_\phi) < v(\xi_H \eta_H \overline{\pi}) = v(\xi_{H,H} \xi_H \eta_H \overline{\pi}) \quad \forall H \neq \phi$

$$\Rightarrow v\left(\sum_{\epsilon(H)=2}^n \xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi}\right) \geq \min_{H \neq \phi} \{v(\xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi})\} > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\epsilon(H)=2}^n \xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi} \in M_V \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\epsilon(H)=2}^n \xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi} \right) \in M_V$$

$$\Rightarrow \Phi(xy, e_\phi) - \xi_\phi \eta_\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\epsilon(H)=2}^n \xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi} \right) \in M_V$$

2. Fall: $N(x) > 0$ und $N(y) > 0$

$$\Rightarrow v(\xi_H^2 \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H \quad \text{und} \quad v(\eta_H^2 \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H$$

$$\Rightarrow v(\xi_H \eta_H \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H, \text{ also } v\left(\sum_{\epsilon(H)=1}^n \xi_H \eta_H \xi_{H,H} \overline{\pi}\right) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow v\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n y_n, e_\phi)\right) > 0 \quad \text{und damit} \quad \Phi(xy, e_\phi) \in M_V$$

Also auch $\xi_\phi, \eta_\phi \in M_V$, also $\xi_\phi \eta_\phi \in M_V$

$$\Rightarrow \Phi(xy, e_\phi) - \xi_\phi \eta_\phi \in M_V$$

3. Fall: $N(x) > 0, N(y) = 0$

$$\Rightarrow \xi_\phi \in M_V \quad \text{und} \quad v(\eta_\phi) = 0, \text{ also } \xi_\phi \eta_\phi \in M_V; \text{ sowie } v(\xi_H^2 \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H,$$

$$v(\eta_H^2 \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H \neq \phi$$

$$\Rightarrow v(\xi_H \eta_H \overline{\pi}) > 0 \quad \forall H \neq \phi, \text{ und } v(\xi_\phi \eta_\phi \overline{\pi}) = v(\xi_\phi) > 0$$

$$\Rightarrow \Phi(xy, e_\phi) - \xi_\phi \eta_\phi \in M_V$$

4. Fall: $N(x) = 0, N(y) > 0$

wie 3. Fall

d) Ψ injektiv

Sei $\Psi(x + P) = M_V$, also $\Phi(x, e_\phi) \in M_V$. Dann ist $v(\xi_\phi) > 0$, also auch $N(x) > 0$ und damit $x \in P$.

e) φ surjektiv

Sei λ, μ beliebig, dann $\varphi(\lambda) = 0$ oder auch $\varphi(\lambda^2) = 0$

Setze $x := \lambda e_\varphi \in C(E)$. Dann ist $\varphi(x) = 0$, also $x \in \mathcal{I}$ und

$$\varphi(x + p) = \varphi(x, e_\varphi) + \mu = \lambda + \mu$$

Behauptung Es ist $N(C(E)) = \{2\delta + \sum_{i \in H} N(e_i) \mid \delta \in \mathbb{N}, 1/H < \infty, \delta \in \Gamma \text{ beliebig}\}$

Als Korollar von Satz 3 erhält man das Resultat von Köthe in [8]

III₂. Köthes Schnittkörper als Nebenprodukt

Korollar 1 (Köthe)

Sei K ein kommutativer Körper mit char $K = 0$, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ je abzählbar viel Unbestimmte und

$$P = K(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$$

Dann gilt für das vollständigste Quotientenprodukt

$$\left(\frac{x_i, y_i}{P} \right)$$

$\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{x_i, y_i}{P} \right)$ ist ein Körper

Beweis

Setze $\alpha_i := x_i$, $\beta_i := y_i$ und $\alpha_{r+1} := \frac{x_{r+1}}{\prod_{k=1}^r (-\alpha_k/\beta_k)}$, $\beta_{r+1} := \frac{y_{r+1}}{\prod_{k=1}^r (-\alpha_k/\beta_k)}$ für $r \geq 1$

$$a_i := \begin{cases} \alpha_n, & \text{für } i = 2n-1 \text{ und } n \geq 1 \\ \beta_n, & \text{für } i = 2n \text{ und } n \geq 1 \end{cases} \quad \forall i \geq 1$$

Sei $\Gamma := \bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}} H R_\sigma$ mit $R_\sigma = \mathbb{Z} \quad \forall \sigma$. Dann gilt: $\exists$ Homomorphismus

$$\varphi: P \rightarrow K(X)^{\Gamma} \quad \text{mit} \quad \varphi(x_n) = X^{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0)} \quad \forall n \geq 1$$

↑
-(2n-1)-te Stelle

$$\varphi(y_n) = X^{(\dots, 0, 1, 0, \dots, 0)} \quad \forall n \geq 1$$

↑
-(2n)-te Stelle

Sei $\tilde{v}: K(X)^{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ die zu $K(X)^{\Gamma}$ gehörende Bewertung (vgl. I₂ (4)).
Dann ist $v := \tilde{v} \circ \varphi: P \rightarrow \Gamma$ eine Bewertung. Sei $(\mathcal{L}, \tilde{v})$ die Ver-
vollständigung von (P, v) . Weiter sei (H, Φ) die aus $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konstru-
ierte Folgenraum über $\mathcal{L}$.

Zeige: Für $n \geq 2$ ist $v(d_n) = (\dots, 0, 1, *, \dots, *)$
 $\uparrow$
 $(-2n+1)$ -te Stelle

$$v(\beta_n) = (\dots, 0, 1, 0, *, \dots, *)$$

$\uparrow$
(-2n)-te Stelle

wo $*$ ein Element in R_0 bedeutet.

Induktion nach n .

$$n=2: v(d_2) = v(x_2) - v(x_1) - v(y_1) = (\dots, 0, 1, -1, -1)$$

$$v(\beta_2) = v(y_2) - v(x_1) - v(y_1) = (\dots, 0, 1, 0, -1, -1)$$

$$v(d_{n+1}) = v(x_{n+1}) - \sum_{k=1}^n (v(d_k) + v(\beta_k)) = (\dots, 0, 1, 0, \dots) - (\dots, 0, 1, *, \dots, *)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $(-2n+1)$ -te Stelle $(-2n)$ -te Stelle

nach Induktionsvoraussetzung

also $v(d_{n+1}) = (\dots, 0, 1, *, \dots, *)$ Ebenso für $v(\beta_{n+1})$.

$\uparrow$
 $(-2n+1)$ -te Stelle

Für die Vektoren $e_i := (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ (Kronecker-Symbol) in H gilt also:
 $N(e_i) \neq N(e_j) \pmod{2\Gamma}$ für $i \neq j$ und $N(e_i) \neq 0 \pmod{2\Gamma}$

Vi. Also ist für $\xi_i \in \mathcal{L}$ beliebig, $i=1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$v\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \alpha_i\right) = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{v(\xi_i^2 \alpha_i)\} \quad (\text{vgl. Beweis zu Lemma 19})$$

$\Rightarrow (H, \Phi)$ erfüllt C.S., nach Lemma 15

$\Rightarrow (H, \Phi)$ vollständig nach Lemma 18

Schließlich sei $e_n := (\dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \forall n \geq 1, \quad e_0 := 0$. Dann
 $\uparrow$
 $(-n+1)$ -te Stelle

hat $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle in II₅ (10) geforderten Eigenschaften. Mit
 Lemma 17 erhält man $\text{Typ}(e_i) \neq \text{Typ}(e_j)$ für $i \neq j$. Also nach

Satz 2 $L_C = L_S$. Weiter gilt auch $\sigma_i + \sigma_{i+1}$ für $i \neq 1$ wo σ_i der mit Index i mit $2t$ ($\mathcal{W}(e_i)$) $\in$. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt um den Satz auf (H, Φ) anzuwenden zu können: Es ist also $C(H)$ ein Körper

Betrachte nun $F := P(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset H$, $\Phi_0 := \Phi|_{F \otimes F}$. (F, Φ_0) ist ein nicht ausgeartet quadratischer Raum über P , also $C(F) \subset C(H)$

$\Rightarrow C(F)$ ist ein Körper

Zeige: $C(F) \cong \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{x_i, y_i}{P} \right)$

Es genügt zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $C(P(e_1, \dots, e_{2n})) \cong \bigotimes_{i=1}^n \left(\frac{x_i, y_i}{P} \right)$

und φ_{n+1} eine Fortsetzung von φ_n

Verwende man leicht zu beweisen Satz aus [1, p. 153, Ex. 2], da für die spezielle Situation hier lautet

Satz Sei oben $k \neq 2$. Sei $E = E_1 \oplus E_2$ ein quadratischer Raum mit Φ_1, Φ_2 seien die Restriktionen von Φ auf die Summanden. Es möge ein $u \in C^+(E_2, \Phi)$ existieren, d.h. es gilt $u^2 = \lambda \cdot 1$, $\lambda \in k \setminus \{0\}$ und $ux_2 = -x_2 u \quad \forall x_2 \in E_2$. Dann ist die Abbildung $\varphi: x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 \otimes u + 1 \otimes x_2$ ein Algebrenisomorphismus $C(E) \rightarrow C(E_1, \lambda \Phi_1) \otimes C(E_2, \Phi_2)$

Damit hat man auch:

Korollar Sei oben $k \neq 2$, $E = \langle d_1, \beta_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle d_n, \beta_n \rangle$ nicht ausgeartet $\beta_1 = 1$, $\beta_{r+1} := \prod_{i=1}^r (-d_i \beta_i)$ für $1 \leq r \leq n$

Dann existiert ein Algebrenisomorphismus $C(E) \cong \bigotimes_{r=1}^n \left(\frac{\beta_r d_r \beta_r}{k} \right)$ da umgekehrt wird durch

$$x_1 \in \langle d_1, \beta_1 \rangle \mapsto x_1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$$

$$i > 1: x_i \in \langle d_i, \beta_i \rangle \mapsto u_2^4 \otimes \dots \otimes u_{i-1}^4 \otimes x_i \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$$

wo $u_i = e_{i-1} f_{i-1}$ und $\langle d_i, \beta_i \rangle = k(e_i, f_i)$ mit $d_i = \Phi(e_i, e_i)$, $\beta_i = \Phi(f_i, f_i)$, $\Phi(e_i, f_i) = 0$.

Sei also gibt $n \in \mathbb{N}$ beliebig, $E = P(e_1, \dots, e_{2n})$, $\Phi_n := \Phi|_{E \times E}$

$\Rightarrow (E, \Phi_n)$ nicht ausgeartet, da Φ anisotrop.

$f_1 d_1 = x_1$, $f_2 d_2 = y_1$ und für $r \geq 2$ ist $f_r d_r = \prod_{i=1}^{r-1} (-d_i, f_i) \cdot d_r$, da
 $E = \langle d_1, d_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle d_n, d_n \rangle$. Also $f_r d_r = x_r$ nach Definition der d_n, f_n
 Ebenso ist $f_r f_r = y_r \quad \forall r \geq 2$

$\Rightarrow C(P(e_1, \dots, e_{2n})) \cong \bigotimes_{r=1}^n \left(\frac{x_r, y_r}{p} \right)$, wobei Φ_n vermittelt wird von der
 Korollar angaben. Damit ist auch klar, dass Φ_n eine Fort-
 setzung von Φ_n ist.

III.3 Die Cliffordalgebren als Bivels angeordnete Schiefkörper

Korollar 2 Sei $v(2) = 0$. Falls der Restklassenkörper k_0 von (A, v, Γ)
 eine Semiordnung trägt (vgl. I.2), ist $C(E)$ ein
 Bivels angeordneter $*$ -Körper und es gilt für x, y
 symmetrisch in $C(E)$:
 $0 < x \leq y \Rightarrow N(x) \geq N(y)$

Beweis

Nach Satz 3 ist $C(E)$ ein faktorisierter $*$ -Körper. Hollander beweist in
 [6, 3.3 Corollary]:

Sei K ein $*$ -Körper mit faktorisierter $*$ -Rechnung w . Dann lässt sich
 jede Bivels Ordnung des Restklassenkörpers k_0 ausheben zu
 einer Bivelschen Ordnung von K und es ist für d, f symmetrisch
 in K : $0 < d \leq f \Rightarrow w(d) \geq w(f)$

wobei eine faktorisierter $*$ -Rechnung w eine $*$ -Rechnung ist mit den
 Eigenschaften: (1) $w(2) = 0$. (2) jede Äquivalenzklasse $w^*(f)$
 für $f \in w(K)$ enthält ein faktorisierendes symmetrisches Element, falls
 sie überhaupt symmetrische Elemente enthält. Sonst enthält sie
 ein faktorisierendes Element.

Der Begriff eines faktorisierenden Elementes definiert Hollander so folgt:

Ein symmetrisches oder schiefes Element ρ in K heißt *flach*, falls ein Automorphismus Γ_ρ von K_0 existiert so, dass für jedes $x \in \Phi$ gilt ($\theta: \Phi \rightarrow K_0$ die kanonische Injektion)

$$\theta(\rho x^* \rho^{-1}) = (\Gamma_\rho \circ * \circ \Gamma_\rho^{-1})(\theta(x))$$

wobei $*$: $K_0 \rightarrow K_0$ definiert ist durch $*(\theta(x)) := \theta(x^*) \quad \forall x \in \Phi$

Es müsst also zu zeigen: i) $\theta(x^*) = \theta(x) \quad \forall x \in \Phi$, ii) N ist flache *-Abwertung

i) Für $x \in \Phi$ ist $\theta(x) = \theta(\xi_\emptyset e_\emptyset)$ wo $x = \sum_{\epsilon(H)=1}^\infty \xi_H e_H$, dann
 $N(\sum_{H \neq \emptyset} \xi_H e_H) = \lim_{H \neq \emptyset} \{N(\xi_H e_H)\} =: \delta$

Falls $N(x) = 0 \Rightarrow \delta = N(\xi_\emptyset e_\emptyset) = 0$ (da $e_\emptyset \perp e_H \quad \forall H \neq \emptyset$)

Falls $N(x) > 0 \Rightarrow \delta \geq \lim_{H \neq \emptyset} \{N(\xi_H e_H)\} = N(x) > 0$

ii) $N(2) = 2v(2) = 0$, also (1) erfüllt

(2): Sei $\mu \in N(C(E))$, also $\mu = 2\delta + N(e_{H_0})$ für gewisses H_0 .

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $v(\lambda) = \delta$. Setze $\rho := \lambda e_{H_0}$, also $\rho \in N(\mathcal{F})$.

$\Rightarrow$ für $x = \sum_{\epsilon(H)=1}^\infty \xi_H e_H \in \Phi$ gilt:

$$\begin{aligned} \theta(\rho x^* \rho^{-1}) &= \theta(\sum \xi_H e_{H_0} e_H^* e_{H_0}^{-1}) = \theta(\sum \xi_H (-1)^{\mu(H)} e_H) \quad \text{für } \mu(H) \in \{0, 1\} \\ &\quad \text{wegen} \\ &= \theta(\xi_\emptyset e_\emptyset) = \theta(x^*) = (\mathbb{1}_{K_0} \circ * \circ \mathbb{1}_{K_0}^{-1})(\theta(x)) \quad , \text{ da } \mu(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

Sei also $\Gamma_\rho = \mathbb{1}_{K_0}$. Wegen der speziellen Bauweise von ρ gilt ρ ist symmetrisch oder schief

1. Fall: ρ symmetrisch $\Rightarrow$ Bedingung (2) ist erfüllt

2. Fall: ρ schief

Es müsst zu zeigen: $N(\mathcal{F})$ enthält keine symmetrischen Elemente

Für $x = \sum_{\epsilon(H)=1}^\infty \xi_H e_H \in C(E)$ mit $\xi_{H_0} \neq 0$ gilt $x \neq x^*$, denn:

Wäre $x = x^* \Rightarrow 0 = x - x^* = \sum_{\epsilon(H)=1}^\infty \xi_H (e_H - e_H^*)$, da $*$ stetig

$$= \sum_{\substack{H \in H \text{ mit} \\ e_H \text{ schief}}} 2\xi_H e_H$$

z. 1 $\xi_H = 0 \quad \forall H \neq H_0$ mit e_{H_0} schief $\Rightarrow 2\xi_{H_0} e_{H_0} = 0$ Widerspruch

2.2. $\exists H \neq H_0$ mit e_H schwach und $f_H \neq 0$

$$\Rightarrow -2f_{H_0}e_{H_0} = \sum_{H \neq H_0} 2f_H e_H$$

$$\Rightarrow N(2f_{H_0}e_{H_0}) = \sum_{\substack{H \neq H_0 \text{ mit} \\ e_H \text{ schwach}}} N(2f_H e_H) = N(2f_{H_1}e_{H_1}) \text{ mit } H_1 \neq H_0$$

Widerspruch zu Lemma 19

Sei nun $x \in C(E)$ mit $N(x) = \mu$.

$\Rightarrow N(x) = N(f_{H_0}e_{H_0})$, da $N(e_H) \neq N(e_{H'})$ (mod 2Γ) für $H \neq H'$ (Lemma 19), also $f_{H_0} \neq 0$ und damit $x \neq x^*$

Bemerkung Man sieht sofort, dass $*$ auf $\widetilde{C(E)}$ fortgesetzt werden kann und, dass (mit denselben Überlegungen wie im Beweis von Satz 3) auch gilt $\widetilde{K_0} \cong L_0$, wo $\widetilde{K_0}$ der Restklassenring von $(\widetilde{C(E_0)}, N)$ ist. Weiter ist auch $N: \widetilde{C(E_0)} \rightarrow N(\widetilde{C(E_0)}) \subset \Gamma$ eine glatte $\mathbb{Q}$ -Bewertung. Also gilt Korollar 2 auch für $\widetilde{C(E_0)}$ statt $C(E)$ (es ist aber $\widetilde{C(E_0)} = \widetilde{C(E)}$!)

III.4. $\widetilde{C(E)}$ ist hilbertsch

Mit der Konstruktion von $\widetilde{C(E_0)}$ hat man einen weiteren hilbertschen Raum:

$$\text{Lemma 24} \quad L_C(\widetilde{C(E_0)}) = L_S(\widetilde{C(E_0)})$$

Beweis:

Es muß gezeigt werden: In der maximalen orthogonalen Familie $(e_H)_{H \in \mathcal{H}}$ von $\widetilde{C(E_0)}$ haben höchstens j unendlich viele unter den e_H $||H|| < \infty$ denselben Typ. (vgl. Satz 2)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, ist zu zeigen um Kapitel III fortgesetzt wurde, kann man o.B.d.A. annehmen, dass für $\sigma_{i,*} = \min \text{supp } (N(e_i))$ gelte $2 + (N(e_i))_{\sigma_{i,*}}^2, \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Nach Annahme von $e_1, \dots, e_m$ sind Basisvektoren von E_0 mit $\text{Typ}(e_i) \leq n$. Sei $\text{Typ}(e_H) = n$ für ein $H \subset M$, $|H| < \infty$

Zeige: $H \subset \{1, \dots, m\}$ ($\Rightarrow \exists$ höchstens endlich viele solche)

$$j := N(e_H) = \sum_{i \in H} N(e_i)$$

1. Fall: $N(e_H) = 0 \Rightarrow H = \emptyset$, da $e_H \perp e_\emptyset$, also $H \subset \{1, \dots, m\}$

2. Fall: $N(e_H) \neq 0$

Sei $\tilde{\sigma} := \text{min supp}(N(e_H)) = \text{min}_{i \in H} \{\sigma_{i*}\} =: \sigma_{i_0*}$, da $\sigma_{i*} + \sigma_{j*}$ für $i \neq j$

$$\Rightarrow \text{für } j = (\tilde{\sigma})_{\sigma \in I} \text{ ist } j_{\sigma} = \tilde{\sigma}_{\sigma_{i_0*}} = (N(e_{i_0}))_{\sigma_{i_0*}}$$

$$\Rightarrow 2j_{\sigma} \text{ und } \sigma_{n+1} \leq \tilde{\sigma} = \sigma_{i_0*} < \sigma_{i*} \quad \forall i \neq i_0, i \in H \quad (\text{Lemma 17})$$

$$\Rightarrow \forall i \in H \text{ ist } \text{Typ}(e_i) \leq n \quad (\text{Lemma 17}), \text{ also } H \subset \{1, \dots, m\}$$

Der Raum $C(E)$ ist aber nicht hilbertsch, denn:

$$\text{Zeige: } C(E) \subsetneq \widetilde{C(E_0)} \quad (\text{Gru})$$

Nach Lemma 1, [10, Kapitel II, Lemma 3], versteht eine Zerlegung von $C(E)$

$$C(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} E_n \quad \text{wo } E_n = \mathcal{L}(\{\alpha_i, \alpha_i \in C(E) \mid (\alpha_i, \alpha_n) \text{ ist ein orthogonales } n\text{-Basis von } E\})$$

$$\text{für } n \geq 1 \text{ und } E_0 = \mathcal{L}$$

Wähle $x_n \in E_n \setminus \{0\}$ ($E_n \neq \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$), $\lambda_n \in \mathcal{L}$ so, dass

$$2v(\lambda_n) + N(x_n) > E_n \quad \forall n. \text{ Dann ist } (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ Nullfolge in } \widetilde{C(E_0)}$$

$$\text{Sei also } x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \in \widetilde{C(E_0)}$$

Annahme: $x \in C(E)$

$$\Rightarrow \exists \gamma_0, \dots, \gamma_m, \gamma_i \in E_i \quad \forall i, m \text{ existiert mit } x = \sum_{i=0}^m \gamma_i$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^m (\lambda_k x_k - \gamma_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

$$\text{Setze } u := \sum_{k=0}^m (\lambda_k x_k - \gamma_k), \quad v := \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k x_k$$

$$\Rightarrow u \perp v, \text{ da obige Zerlegung orthogonal, also } u = v = 0$$

$$\text{Da } \lambda_i, x_i \neq 0 \quad \forall i, \text{ existiert } j_0 \in \Gamma \text{ mit } j_0 > 2v(\lambda_{m+1}) + N(x_{m+1})$$

$$v = 0 \Rightarrow \exists \eta_{j_0} \text{ mit } N\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k x_k\right) > j_0 \quad \forall r \geq r_{j_0}$$

$\Rightarrow \min_{m \leq k < r} \{N(\lambda_k x_k)\} > \delta_0 \quad \forall r \geq r_m$, da $\lambda_k x_k \perp \lambda_l x_l$ für $k \neq l$

$\Rightarrow \min_{m \leq k < r} \{N(\lambda_k x_k)\} > N(\lambda_{m+1} x_{m+1}) \quad \forall r \geq r_m$ Widerspruch

IV. Lineare Abbildungen auf Hilbertschen Räumen

IV.1 Beschränkte lineare Abbildungen

Sei (E, Φ) ein Hilbertscher Raum über $\mathbb{K}$ mit den Voraussetzungen wie in Kapitel I § (5).

Sei $f: E \rightarrow E$ eine lineare Abbildung f heißt beschränkt, falls aus $y \in \Gamma$ resultiert mit $N(fx) \leq y + N(x) \quad \forall x \in E$

Beispiel: Sei M ein Teilraum von E mit $E = M \oplus M^\perp$;

$p_M: M \oplus M^\perp \rightarrow M$ mit $p_M(x+y) = x$ ist linear und ist p_M

$$N(p_M(x+y)) = N(x) \leq \min\{N(x), N(y)\} = N(x+y) \quad \forall x+y \in M \oplus M^\perp$$

Bezeichnung: $\mathcal{B}(E) := \{f \in \mathcal{L}(E, E) \mid f \text{ beschränkt}\}$

Es gilt: $\mathcal{B}(E)$ ist eine Algebra mit Einselement. Auf $\mathcal{B}(E)$

wird auch eine Topologie definiert, indem man setzt:

$$\forall y \in \Gamma \text{ sei } U_y := \{f \in \mathcal{B}(E) \mid N(fx) \leq y + N(x) \quad \forall x \in E\}$$

$\Rightarrow$ Mit $(U_y)_{y \in \Gamma}$ als Nullumgebungsbase wird $\mathcal{B}(E)$ zu einer topologischen Algebra

Lemma 25 i) E vollständig $\Rightarrow \mathcal{B}(E)$ vollständig

ii) Die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}$ von (E, Φ) ist abgeschlossen in $\mathcal{B}(E)$

Beweis:

i) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathcal{B}(E)$. Dann ist $\forall x \in E$ $(f_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine

Cauchyfolge in E . Da E vollständig ist, konvergiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x$ in E für jedes $x \in E$. Setze $fx = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n x \quad \forall x \in E$
 $\Rightarrow f$ linear

zu zeigen: f beschränkt

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N(f_n x - f_m x) \geq 0 + N(x) \quad \forall x \in E$
 $\forall n, m \geq n_0$

Sei: (*) für $n \geq n_0, x \in E$ ist entweder $N(f_n x) \geq N(x)$ oder
 $N(f_n x) = N(f_{n_0} x)$

Sei $x \in E, n \geq n_0$ und $N(f_n x) < N(x)$. Annahme: $N(f_{n_0} x) \geq N(x)$
 $\Rightarrow N(f_n x - f_{n_0} x) = N(f_n x) \geq N(x)$ Widerspruch

Also $N(f_{n_0} x) < N(x)$

$\Rightarrow N(f_n x) = N(f_{n_0} x)$, da sonst $N(f_n x - f_{n_0} x) = N(f_n x) \geq N(x)$ Widerspruch

Setze $f_0 := \min \{f_{n_0}, 0\}$, so $N(f_{n_0} x) \geq f_0 + N(x) \quad \forall x$

Sei $x \in E$ beliebig, o.B.d.A. $x \neq 0$

1. Fall: $N(fx) \geq N(x) \Rightarrow N(fx) \geq f_0 + N(x)$

2. Fall: $N(fx) < N(x)$

Da $N(x) < \infty \quad \exists n_1 \geq n_0$ in $\mathbb{N}$ mit $N(fx) = N(f_{n_1} x)$

$\Rightarrow N(f_{n_1} x) = N(f_{n_0} x)$ nach (*)

$\Rightarrow N(fx) = N(f_{n_1} x) \geq f_{n_0} + N(x) \geq f_0 + N(x)$

ii) Hier ist $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}(E)$

Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{O}$ mit $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ in $\mathcal{B}$. Seien $x_0, y_0 \in E$.

Zeige: $\Phi(Tx_0, Ty_0) = \Phi(x_0, y_0)$ o.B.d.A. $x_0, y_0 \neq 0$

Sei $j \in \mathbb{I} \quad j_0 = \min \{N(x_0), N(y_0)\}$

$\Rightarrow \exists n_j \in \mathbb{N}$ mit $N(Tx - T_n x) \geq j + N(x) \quad \forall x \in E, \text{ so } j > j_0, \forall n \geq n_j$

$\Rightarrow N(Tx_0 - T_n x_0) \geq j \quad \forall n \geq n_j$

$\Rightarrow Tx_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x_0$ Ebenso $Ty_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n y_0$

$\Rightarrow \Phi(Tx_0, Ty_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(T_n x_0, T_n y_0) = \Phi(x_0, y_0)$

IV₂ Zusammenhang zwischen stetigen und beschränkten Abbildungen

Im Hilbertschen Hilberträumen gilt für lineare Abbildungen f
 f beschränkt $\Leftrightarrow f$ stetig

hier genügt Stetigkeit allein nicht:

Satz 4 Sei Γ eine geordnete Gruppe aus Hauptsatz 3
 $\substack{H R_\Gamma \\ \sigma \in \Gamma}$, $L_\sigma = L_\tau$ und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine maximale orthogonale Familie in E mit:

- $\exists$ höchstens ein $i \in \mathbb{N}$ mit $N(e_i) \equiv 0 \pmod{2\Gamma}$

- Mit $\sigma_{i,k}$ als kleinstem Index v mit $2^v (N(e_i))_v$ in R_σ
 ist $\sigma_{i,k} \neq \sigma_{j,k}$ für $i \neq j$

Sei $f: E \rightarrow E$ linear mit $f e_i = \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} e_j$. Dann gilt:

$$f \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } f \text{ stetig} \\ \text{ii) } \{d_{ii}\} N(f e_i) \equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma} \} \\ \text{ist auch unten beschränkt} \end{cases}$$

Zunächst soll an einem Beispiel gezeigt werden, dass ii) tatsächlich eine notwendige Bedingung zu i) ist

Sei $\Gamma = \substack{H R_\sigma \\ \sigma \in \mathbb{N}}$ mit $R_\sigma = \mathbb{Z} \forall \sigma$ und $f_i = (\dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ -(i-1) \cdot \sigma \text{ Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0) \forall i \in \mathbb{N}$

Sei (E, Φ) ein "passender" Raum mit $L_\sigma = L_\tau$ und maximaler orthogonaler Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $N(e_i) = f_i \forall i$ (nach II.5 konstruiert). Dann erfüllt (E, Φ) die Voraussetzungen des Satzes

Sege $f(e_i) = e_i$ und $f(e_n) = \Phi(e_{n-1}, e_{n-1})^{-1} e_n$ für $n > 1$

Zeige: f kann existiert werden zu stetiger Abbildung auf E ,
 aber ii) ist nicht erfüllt.

- ii) nicht erfüllt: $v(d_{nn}) = -N(e_{n-1})$ für $n > 1$, also auch unten unbeschränkt

- jetzt zunächst

(*) Für $j = (\dots, 0, j_0, *, \dots, *) > 0$ in Γ mit $j_0 \neq 1, 2+j_0$ und
 $\uparrow$
 $-(n+1)$ -te Stelle

für $\delta := j + 2N(e_{n-1})$ gilt

$$N(f_i, e_i) > \delta \text{ für ein } i \in \mathbb{N}, f_i \in \mathcal{L} \Rightarrow N(f_i, e_i) > j$$

Beweis:

$$i=1: N(f_i, e_i) = N(f_i, e_i) > \delta > j$$

$$i>1: N(f_i, e_i) = N(f_i, e_i) + (\dots, 0, -2, 0, \dots, 0) \\ \uparrow \\ (-i)$$

Falls $v(f_i) = 0$ ist $N(f_i, e_i) = N(e_i) > \delta$ Es ist aber

$$N(e_i) - \delta = \begin{cases} (\dots, 0, 1, *, \dots, *) & \text{falls } -i < -n \\ \uparrow \\ -(i+1) \\ (0, 1-j_0, *, \dots) & \text{falls } i=n \\ (\dots, 0, -j_0, *, \dots) & \text{falls } -i > -n \end{cases}$$

Da $j_0 \neq 1, j_0 > 0$ und also $j_0 > 1$ ist $i=n$ unmöglich; ebenso ist auch $-i > -n$ unmöglich

$$\Rightarrow N(f_i, e_i) - j = N(e_i) - 2N(e_{i-1}) - j = (\dots, 0, 1, *, \dots) > 0 \\ \uparrow \\ -(i+1)\text{-te Stelle}$$

Sei also $v(f_i) = (\dots, 0, \lambda_0, *, \dots)$ mit $\lambda_0 \neq 0$
 $\uparrow$
 $-(m+1)$ -te Stelle

1. Fall: $-m < -i$

$$\underline{-m < -i}: N(f_i, e_i) - \delta = (\dots, 0, 2\lambda_0, *, \dots) > 0 \\ \uparrow \\ -(m+1)$$

$$\Rightarrow N(f_i, e_i) - j = (\dots, 0, 2\lambda_0, *, \dots) > 0$$

$$\underline{-m = -i}: N(f_i, e_i) - \delta = (\dots, 0, 2\lambda_0 - j_0, *, \dots) > 0$$

$$\Rightarrow N(f_i, e_i) - j = (\dots, 0, 2\lambda_0 - j_0, *, \dots) > 0, \text{ da } 2+j_0$$

$$\underline{-m > -i}: \text{unmöglich, da sonst } N(f_i, e_i) - \delta = (\dots, 0, -j_0, *, \dots) < 0$$

2. Fall: $-u = -1$

$$\underline{-u \leq -1} : N(\xi_i e_i) - \delta = (\dots, 0, 2\lambda_0 + 1, \dots)_{-(m+1)} > 0, \text{ also } 2\lambda_0 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow N(\xi_i f e_i) - \delta = (\dots, 0, 2\lambda_0 + 1, \dots) > 0$$

$$\underline{-u = -1} : N(\xi_i f e_i) = N(\xi_n f e_n) = N(\xi_n e_n) - 2N(e_{n-1}) > \delta - 2N(e_{n-1}) = \delta$$

$$\underline{-u > -1} : \text{unmöglich}$$

3. Fall: $-u > -1$

$$\underline{-u \leq -1} : N(\xi_i f e_i) - \delta = (\dots, 0, 1, * \dots)_{-(i+1)} > 0$$

$$\underline{-u > -1} : N(\xi_i e_i) - \delta = \begin{cases} (\dots, 0, -\delta_0, * \dots)_{-(n+1)}, & \text{falls } -u < -1 \\ (\dots, 0, 1 - \delta_0, * \dots)_{-(n+1)}, & \text{falls } -u = -1 \\ (\dots, 0, 1, * \dots)_{-(i+1)}, & \text{falls } -u > -1 \end{cases}$$

Weder ist $-u < -1$ unmöglich

$$\text{Falls } n = i : 1 - \delta_0 > 0, \text{ da } \delta_0 \neq 1, \text{ also } N(\xi_i f e_i) - \delta = (\dots, 0, 1 - \delta_0, * \dots)_{-(n+1)} > 0$$

$$\text{Falls } -u > -1 : N(\xi_i f e_i) - \delta = (\dots, 0, 1, * \dots)_{-(i+1)} > 0$$

f kann verifiziert werden zu stetigen $\bar{f}$ auf E

Sei $(\xi_i e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Nullfolge. Sei $\delta \in \Gamma$. Wähle zunächst $\bar{\delta} \geq \delta$ mit $1 + \bar{\delta}_0, 2 + \bar{\delta}_0, \bar{\delta} > 0$ wo $\bar{\delta} = (\dots, 0, \bar{\delta}_0, * \dots)$ und δ wie in (*) passend zu $\bar{\delta}$

$$\Rightarrow \exists n_\delta \text{ mit } N(\xi_i e_i) > \delta \quad \forall i > n_\delta$$

$$\Rightarrow N(\xi_i f e_i) > \bar{\delta} \geq \delta \quad \forall i > n_\delta \quad \text{nach (*)}$$

Also ist $(\xi_i f e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Nullfolge. Wegen $L_c = L_s$ existiert also zu $\bar{x}$ aus $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ in E $\bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i f e_i$

$$\rightarrow \bar{f} \text{ linear und } \bar{f}|_{L(e_i)_{i \in \mathbb{N}}} = f$$

Zeige: $\bar{f}$ stetig. Genügt zu zeigen $\bar{f}$ stetig in $x_0 = 0$.

Sei $f \in \Gamma$. Wähle zu oben $\tilde{f} \geq f$ so, dass δ passend zu $\tilde{f}$ mit den Voraussetzungen von (*) Sei $x \in E$ mit $N(x) > \delta$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, \quad N(x) = N(f_0 e_0) \leq N(f_i e_i) \quad \forall i, \quad \text{für ein geeignetes } i_0 \\ \Rightarrow N(f_{i_0} e_{i_0}) > \delta \quad \forall i$$

$$\Rightarrow N(f_i e_i) > \delta \quad \forall i \quad \text{nach (*)}$$

$$\Rightarrow N(fx) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i f e_i\right) \quad \text{für ein geeignetes } i_0, \quad \text{falls } fx \neq 0$$

$$\geq \min_{i \leq i_0} \{N(f_i f e_i)\} > \delta$$

$$\text{falls } fx = 0, \quad \text{ist } N(fx) > \delta$$

Für den Beweis von Satz 4 braucht man folgendes Lemma

Lemma 26 Sei (E, Φ) mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 4 gegeben. Sei $f: E \rightarrow E$ linear und stetig
 $\Rightarrow \{i \in \mathbb{N} / N(f e_i) < N(e_i) \text{ und } N(f e_i) \not\equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma}\} / < \infty$

Beweis obdA höchstens $N(e_i) \equiv 0 \pmod{2\Gamma}$ und $\sigma_{i+1} < \sigma_i \quad \forall i$

Sei $I_1 = \{i \in \mathbb{N} / N(f e_i) < N(e_i) \text{ und } N(f e_i) \equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma} \text{ und } i > j\}$

$I_2 = \{i \in \mathbb{N} / N(f e_i) < N(e_i) \text{ und } N(f e_i) \equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma} \text{ und } i > i_1\}$

$$I_0 = I_1 \cup I_2$$

1. Zeige: Seien $\bar{e}_i = \lambda_i e_i$ für $\lambda_i \in \mathbb{C} \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow I_1((e_i)_\mathbb{N}) = I_1((\bar{e}_i)_\mathbb{N}), \quad \text{ebenso für } I_2$$

$$\text{Es gilt } N(f e_i) < N(e_i) \Leftrightarrow N(f \bar{e}_i) < N(\bar{e}_i) \quad \forall i$$

$$N(f e_i) = N(\lambda f e_i) \quad \forall i, \quad \text{also } N(f \bar{e}_i) \equiv N(f e_i) \pmod{2\Gamma} \quad \forall i$$

Nun kann also obdA $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so wählen, dass für $N(e_i) = (j_i \sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt

$$- N(e_i) \not\equiv 0 \pmod{2\Gamma} \Rightarrow \sigma_{i_1} = \min \text{supp}(N(e_i)) \text{ und } j_{\sigma_{i_1}} > 0; \text{ sowie} \\ j_{\sigma_{i_1}} = 1, \text{ falls } R_{\sigma_{i_1}} \cong \mathbb{Z}$$

$$N(e_1) \equiv 0 \text{ (mod } 2\Gamma) \Rightarrow N(e_1) = 0$$

Bezeichnung: Schwache Lenz $\gamma_{\sigma_i^*}$ statt γ_{i, σ_i^*}

$$2. \text{ Teil } |I_1| < \infty$$

$\gamma_{i\epsilon}$ zeigen: $i \in I_1 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ so, dass $N(\lambda_i e_i) > N(e_{i-1})$ und $N(\lambda_i e_i) \leq 0$

(Bemerkung: $1 \notin I_1$, da $N(e_1) \equiv N(e_i)$ für jedes $i \geq 1$)

Dann gilt nämlich: Wäre $|I_1| = \infty$, dann wäre $(\lambda_i e_i)_{i \in I_1}$ eine Nullfolge, aber $(\lambda_i e_i)_{i \in I_1}$ nicht, im Widerspruch zur Stetigkeit von f

Sei $i \in I_1$ (also $i \neq 1$)

$$\Rightarrow N(e_i) < N(e_i) \text{ und } N(e_i) = N(d_{ij_0} e_{j_0}) \text{ mit } j_0 < i \text{ wo}$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} e_j$$

Falls $v(d_{ij_0}) = 0$, setze $\lambda_i := \Phi(e_{j_0}, e_{j_0})^{-1}$.

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) = -2N(e_{j_0}) + N(e_i) = -2N(e_{j_0}) + N(e_{j_0}) \leq 0$$

$$N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) = -2N(e_{j_0}) + N(e_i) - N(e_{i-1}) = (\beta_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ wo}$$

$$\beta_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma < \sigma_{i*} \\ \gamma_{\sigma, i*} & \sigma = \sigma_{i*} \\ * & \text{sonst} \end{cases}, \text{ da } \sigma_{i*} < \sigma_{i-1*} \leq \sigma_{j_0*}$$

(* meint: beliebiges Element in $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow (\beta_\sigma)_{\sigma \in I} > 0$$

(β_σ hat auch die oben angegebene Form, falls $i=2$ und $N(e_1)=0$ oder falls $j_0=1$ und $N(e_{j_0})=0$.)

Es sei also $v(d_{ij_0}) \neq 0$. $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in I} := v(d_{ij_0})$ mit $\sigma_0 := \min \text{supp}((\lambda_\sigma)_{\sigma \in I})$

Es ist $\sigma_{i*} < \sigma_{j_0*}$, falls $N(e_{j_0}) \neq 0$

$$1. \text{ Fall: } \sigma_0 < \sigma_{i*}$$

$$\Rightarrow N(fe_i) - N(e_i) = (\beta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \text{ mit } \beta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(fe_i) = (\delta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \text{ mit } \delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases} \quad , \text{ also } N(fe_i) < 0$$

Setze $\lambda_i := 1$

2. Fall $\sigma_0 = \sigma_{i,*}$

2.1 : $v(d_{ij_0}) < 0$

$$\Rightarrow N(fe_i) = (\delta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \text{ mit } \delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases} \quad , \text{ also } N(fe_i) < 0$$

Setze $\lambda_i := 1$

2.2 : $v(d_{ij_0}) > 0$

$$\Rightarrow N(fe_i) - N(e_i) = (\beta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \text{ mit } \beta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} - \mu_{\sigma_{i,*}} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

Da $i \in I_1$ und $2 + \mu_{\sigma_{i,*}}$ ist also $2\lambda_{\sigma_0} - \mu_{\sigma_{i,*}} < 0$

$$\Rightarrow 0 < 2\lambda_{\sigma_0} < \mu_{\sigma_{i,*}}$$

$\Rightarrow R_{\sigma_0} \neq \mathbb{Z}$, da nach Voraussetzung $\text{smut } \mu_{\sigma_{i,*}} = 1$

$\Rightarrow R_{\sigma_0}$ existiert in R

Da $\frac{\mu_{\sigma_{i,*}}}{2} > \lambda_{\sigma_0}$ in R , existiert also μ_{σ_0} in R_{σ_0} mit

$$\lambda_{\sigma_0} < -\mu_{\sigma_0} < \frac{\mu_{\sigma_{i,*}}}{2}$$

Wähle $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ mit $v(\lambda_i) = (\mu_{\sigma'})_{\sigma' \in I}$, wo $\mu_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' \neq \sigma_0 \\ \mu_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) = (\nu_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \quad , \quad \nu_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\mu_{\sigma_0} + \mu_{\sigma_{i,*}} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) > 0$$

$$N(\lambda_i; e_i) = (\rho_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ mit } \rho_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_0 \\ 2\mu_{\sigma_0} + 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i; e_i) < 0$$

3. Fall : $\sigma_0 > \sigma_{i*}$

3.1 : $\sigma_0 < \sigma_{i*}^*$ oder $N(e_i) = 0$

$$A) v(d_{ij_0}) < 0 \Rightarrow N(e_i) = (\delta_\sigma) \text{ mit } \delta_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(e_i) < 0. \text{ Setze } \lambda_i := 1$$

B) $v(d_{ij_0}) > 0$

Wähle $\mu_{\sigma_0} \in R_{\sigma_0}$ mit $\mu_{\sigma_0} < -\lambda_{\sigma_0}$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$v(\lambda_i) = (\mu_\sigma)_{\sigma \in I}, \text{ wo } \mu_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma \neq \sigma_0 \\ \mu_{\sigma_0} & , \sigma = \sigma_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i; e_i) - N(e_{i-1}) = (\nu_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ mit } \nu_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{i*} \\ \mu_{\sigma_{i*}} & , \sigma = \sigma_{i*} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(\lambda_i; e_i) - N(e_{i-1}) > 0$$

$$N(\lambda_i; e_i) = (\rho_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ mit } \rho_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_0 \\ 2\mu_{\sigma_0} + 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(\lambda_i; e_i) < 0$$

3.2 : $\sigma_0 = \sigma_{i*}^*$

$$A) 2\lambda_{\sigma_0} + \mu_{\sigma_{i*}^*}^* < 0 \Rightarrow N(e_i) = (\delta_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ mit } \delta_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} + \mu_{\sigma_{i*}^*}^* & , \sigma = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(e_i) < 0. \text{ Setze } \lambda_i := 1$$

B) $2\lambda_{\sigma_0} + \mu_{\sigma_{i*}^*}^* > 0$ ("=0" unmöglich, da $2 + \mu_{\sigma_{i*}^*}^*$)

Wähle $\mu_{\sigma_0} \in R_{\sigma_0}$ mit $2\mu_{\sigma_0} < -\mu_{\sigma_{i*}^*}^* - 2\lambda_{\sigma_0}$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$v(\lambda_i) = (\mu_\sigma)_{\sigma \in I} \text{ wo } \mu_\sigma = 0 \text{ für } \sigma \neq \sigma_0 \text{ und } \mu_\sigma = \mu_{\sigma_0} \text{ für } \sigma = \sigma_0$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) = (\nu_\sigma)_{\sigma \in I} \quad \text{mit} \quad \nu_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{i,*} \\ \delta_{\sigma_{i,*}}^\mu & , \sigma = \sigma_{i,*} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) > 0$$

$$N(\lambda_i f e_i) = (\rho_\sigma)_{\sigma \in I} \quad \text{mit} \quad \rho_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_0 \\ 2\mu_{\sigma_0} + 2\lambda_{\sigma_0} + \delta_{\sigma_{0,*}}^\mu & , \sigma = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(\lambda_i f e_i) < 0$$

$$\underline{3.3} : \sigma_0 > \sigma_{i_0,*}$$

Wähle $\mu_{\sigma_{i_0,*}}^\mu$ so, dass $2\mu_{\sigma_{i_0,*}}^\mu < -\delta_{\sigma_{i_0,*}}^\mu$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ "positiv"

$$\Rightarrow N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) = (\nu_\sigma)_{\sigma \in I} \quad \text{mit} \quad \nu_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{i,*} \\ \delta_{\sigma_{i,*}}^\mu & , \sigma = \sigma_{i,*} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(\lambda_i e_i) - N(e_{i-1}) > 0$$

$$N(\lambda_i f e_i) = (\nu_\sigma)_{\sigma \in I} \quad \text{mit} \quad \nu_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{i_0,*} \\ 2\mu_{\sigma_{i_0,*}}^\mu + \delta_{\sigma_{i_0,*}}^\mu & , \sigma = \sigma_{i_0,*} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(\lambda_i f e_i) < 0$$

$$\underline{3.4.1} : |I_2| < \infty$$

Sei $i \in I_2$. Dann ist $N(f e_i) = N(d_{j_0} e_{j_0})$ mit $j_0 > i$

$$\Rightarrow \sigma_{j_0,*} < \sigma_{i,*} \quad , \quad \text{falls } N(e_i) \neq 0$$

$v(d_{j_0}) = 0$ ist nicht möglich, da sonst $N(f e_i) = N(e_{j_0}) < N(e_i)$

für ein $i < j_0$. Widerspruch

Sei also $\sigma_0 = \min \text{supp}(v(d_{j_0}))$, $v(d_{j_0}) = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I}$

$$\underline{1. Fall} : \sigma_0 > \sigma_{j_0,*}$$

$$\Rightarrow N(e_i) - N(f e_i) = (\rho_\sigma)_{\sigma \in I} \quad \text{mit} \quad \rho_\sigma = \begin{cases} 0 & , \sigma < \sigma_{j_0,*} \\ -\delta_{\sigma_{j_0,*}}^\mu & , \sigma = \sigma_{j_0,*} \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{also } N(e_i) - N(f e_i) < 0. \text{ Unmöglich}$$

2. Fall: $\sigma_0 = \sigma_{j_0, \infty}^*$

$$\Rightarrow N(e_i) - N(fe_i) = (\lambda_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ -2\lambda_{\sigma_0} - \mu_{\sigma_{j_0, \infty}^*}^* & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

Da $2\lambda_{\sigma_{j_0, \infty}^*}^*$ und $i \in I_2$ ist $-2\lambda_{\sigma_0} - \mu_{\sigma_{j_0, \infty}^*}^* > 0$

$$\Rightarrow N(fe_i) = (\delta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \quad \text{mit} \quad \delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} + \mu_{\sigma_{j_0, \infty}^*}^* & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(fe_i) < 0$$

3. Fall: $\sigma_0 < \sigma_{j_0, \infty}^*$

$$\Rightarrow N(e_i) - N(fe_i) = (\lambda_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ -2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\sigma_0} < 0$$

$$\Rightarrow N(fe_i) = (\delta_{\sigma'})_{\sigma' \in I} \quad \text{mit} \quad \delta_{\sigma'} = \begin{cases} 0 & , \sigma' < \sigma_0 \\ 2\lambda_{\sigma_0} & , \sigma' = \sigma_0 \\ * & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(fe_i) < 0$$

Es ist also in allen Fällen $N(fe_i) < 0$ für $i \in I_2$, was Widerspruch zur Stetigkeit von f , falls man annehmen würde, dass $|I_2| = \infty$

Beweis von Satz 4

" $\Rightarrow$ ": i) Stetigkeit von f liefert

ii): $\exists \gamma_1 \in \Gamma$ mit $N(fx) \geq \gamma_1 + N(x) \quad \forall x \in E$. Setze $\gamma_0 := \min\{0, \gamma_1\}$.

Für $i \in N$ mit $N(fe_i) \equiv N(e_i)$ (mod 2Γ) gilt: $N(fe_i) = N(d_{ii}e_i)$

(da $N(e_i) \not\equiv N(e_j)$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung)

$$\Rightarrow 2v(d_{ii}) \geq \gamma_1$$

Falls $v(d_{ii}) \geq 0$, ist $v(d_{ii}) \geq \gamma_0$

Falls $v(d_{ii}) < 0$, folgt $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq 2v(d_{ii}) < v(d_{ii})$

⊆ " 1. Zeige: $\exists j_0 \in \Gamma$ mit $N(fe_i) \geq j_0 + N(e_i) \quad \forall i$

Nehmen i) und Lemma 26 an

$\{i_1, \dots, i_n\} = \{i \in \mathbb{N} \mid N(fe_i) < N(e_i) \text{ und } N(fe_i) \not\equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma}\}$

Nach ii) existiert $j \in \Gamma$ mit $v(dii) \geq j \quad \forall i$ mit $N(fe_i) \equiv N(e_i)$

(mod 2Γ)

Setze $j_k = N(fe_{i_k}) - N(e_{i_k}) \quad , k=1, \dots, n \quad , j_0 = \min\{2j, j_1, \dots, j_n, 0\}$

Dann gilt für $i \in \mathbb{N}$ beliebig

1. Fall: $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$

$$\Rightarrow N(fe_i) = N(fe_{i_k}) \quad \text{für ein } 1 \leq k \leq n$$

$$= j_k + N(e_{i_k}) \geq j_0 + N(e_i)$$

2. Fall: $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$

a) $N(fe_i) \geq N(e_i) \geq j_0 + N(e_i)$

b) $N(fe_i) < N(e_i)$

$$\Rightarrow N(fe_i) = N(dii; e_i) \quad , \text{ da } i \text{ mit } N(fe_i) \not\equiv N(e_i) \pmod{2\Gamma}$$

$$\Rightarrow N(fe_i) = 2v(dii) + N(e_i) \geq 2j + N(e_i) \geq j_0 + N(e_i)$$

2. Zeige: $N(fx) \geq j_0 + N(x) \quad \forall x \in E$

Sei $x \in E$ beliebig. o.B.d.A. $fx \neq 0$ (sonst: $N(fx) \geq j_0 + N(x)$ klar)

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \quad \text{mit } N(x) = \min\{N(\xi_i e_i)\} \quad (\text{da } L_c = L_f)$$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow fx = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i f e_i$$

$$\Rightarrow N(fx) = N\left(\sum_{i=1}^{n_0} \xi_i f e_i\right) \quad \text{für ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ geeignet}$$

$$\geq \min_{1 \leq i \leq n_0} \{N(\xi_i f e_i)\} = N(\xi_{i_0} f e_{i_0}) \geq j_0 + N(\xi_{i_0} e_{i_0}) \quad \text{nach 1}$$

$$\geq j_0 + N(x)$$

IV.3 Orthogonale Abbildungen

Sei τ die Topologie auf $\mathcal{O}$, die durch die in IV.1 definierte Topologie auf $\mathcal{H}(E)$ induziert wird

Bezeichnung: $\forall j \in \Gamma$ sei $V_j := (1 + U_j) \cap \mathcal{O}$

Dann gelten (1) $(T + U_j) \cap \mathcal{O} = T \cdot V_j \quad \forall T \in \mathcal{O} \quad \forall j \in \Gamma$

(2) V_j Normalteiler in $\mathcal{O} \quad \forall j \in \Gamma$

Beweis:

(1): " $\supset$ " Sei $T \cdot S \in T \cdot V_j$, also $S \in \mathcal{O}$ und $N(x - Sx) \geq j + N(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow N((T - T \cdot S)x) = N(Tx - T(Sx)) = N(x - Sx) \quad \text{da } T \in \mathcal{O}$

$$\geq j + N(x) \quad \forall x$$

$\Rightarrow T - T \cdot S \in U_j$

$\Rightarrow T \cdot S \in T + U_j$ und $S, T \in \mathcal{O}$, also $T \cdot S \in (T + U_j) \cap \mathcal{O}$

" $\subset$ " Sei $S \in \mathcal{O}$ und $N(Tx - Sx) \geq j + N(x) \quad \forall x$

$$\Rightarrow N(x - T^{-1}Sx) \geq j + N(x) \quad \forall x$$

$\Rightarrow 1 - T^{-1}S \in U_j$, also $T^{-1}S \in 1 + U_j$

$$\Rightarrow S = T \cdot (T^{-1}S) \in T \cdot ((1 + U_j) \cap \mathcal{O}) = T \cdot V_j$$

(2) Sei $j \in \Gamma$, $S, T \in V_j$

$$\Rightarrow N(S \cdot Tx - x) = N(S(Tx) - Tx + Tx - x) \geq \min\{N(STx - Tx), N(Tx - x)\}$$

$$N(S(Tx) - Tx) \geq j + N(Tx) = j + N(x) \quad \forall x \in E, \text{ da } S \in V_j$$

$$N(Tx - x) \geq j + N(x) \quad \forall x \in E, \text{ da } T \in V_j$$

$$\Rightarrow N(S \cdot Tx - x) \geq j + N(x) \quad \forall x \in E, \text{ also } S \cdot T \in V_j$$

$$\text{Sei } S \in V_j \Rightarrow N(S^{-1}x - x) = N(x - Sx) \geq j + N(x) \quad \forall x \in E, \text{ also } S^{-1} \in V_j$$

Sei $S \in V_j$, $T \in \mathcal{O}$ beliebig

$$\Rightarrow N(T^{-1}STx - x) = N(STx - Tx) \geq j + N(Tx) = j + N(x) \quad \forall x \in E$$

$$\text{also } T^{-1}S \cdot T \in V_j$$

Folgerung: $(\mathcal{O}, \tau_+)$ ist eine topologische Gruppe

(3) τ_+ ist Hausdorffsch

Beweis: klar falls $\mathcal{O} = \{1\}$. Sei also $\mathcal{O} \neq \{1\}$, $T \neq 1$ in $\mathcal{O}$

Dann existiert $x_0 \in E$ mit $Tx_0 \neq x_0$. Wähle $\delta > \nu(Tx_0 - x_0) - \nu(x_0)$
 $\Rightarrow T \notin V_\delta$

(4) Sei $L_C = L_S$, dann $E \geq 2$ und $\text{char } k \neq 2$. Dann ist τ_1
 nicht diskret

Bemerkung: Für den $E=1$ und $\text{char } k \neq 2$ gilt: $\mathcal{O} = \{1, -1\}$
 und für $\delta > 2\nu(2)$ ist $-1 \notin V_\delta$, also ist $\{1\}$ Umgebung von 1
 $\Rightarrow E$ diskret

Der Beweis von (4) verwendet folgende Lemma, wobei für
 $\alpha \in E \setminus \{0\}$ $\Omega_\alpha \in \mathcal{O}$ die Spiegelung an $\alpha^\perp$ sei

$$\Omega_\alpha(x) = x - \frac{2\phi(\alpha, x)}{\phi(\alpha, \alpha)} \cdot \alpha$$

Lemma 27 Sei $L_C = L_S$ und $\text{char } k \neq 2$. Für $\delta > 2\nu(2)$ und
 dann $E \geq 2$ gilt:

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_b \in V_\delta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq b \text{ und} \\ \nu\left(a - \frac{\phi(a, \alpha)}{\phi(\alpha, b)} \cdot b\right) \geq \delta + \nu(a) - 2\nu(2) \end{cases}$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Annahme $\alpha \perp b$

$\Rightarrow \nu(\Omega_\alpha \circ \Omega_b(a) - a) = \nu(\Omega_\alpha(a) - a) = 2\nu(2) + \nu(a) < \delta + \nu(a)$ Widerspruch

Sei $\bar{a} := \frac{-\phi(a, \alpha)}{\phi(\alpha, b)}$, $\bar{b} := \bar{a}b$

$\Rightarrow \phi(\bar{b} + \alpha, \alpha) = \frac{\phi(a, \alpha)}{\phi(\alpha, b)} \phi(b, \alpha) + \phi(a, \alpha) = 0$, also ist für $c = \bar{b} + \alpha$ $c \perp \alpha$

und $\phi(\bar{b}, \alpha) = -\phi(a, \alpha)$. Weiter ist $\Omega_{\bar{b}} = \Omega_b$.

$\Rightarrow \nu(\Omega_\alpha \circ \Omega_b(a) - a) = \nu(\Omega_{\bar{b}}(a) - \Omega_\alpha(a)) = \nu\left(a - \frac{2\phi(a, \bar{b})}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \bar{b} + a\right)$

$$= \nu\left(\left(2 + \frac{2\phi(a, \bar{b})}{\phi(\bar{b}, \bar{b})}\right)a - \frac{2\phi(a, \bar{b})}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \cdot c\right)$$

$$= 2v(2) + \min \left\{ N\left(\frac{\phi(\bar{b}, \bar{b}) - \phi(a, a)}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \cdot a\right), N\left(\frac{\phi(a, a)}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \cdot c\right) \right\}, \text{ da } a \perp c$$

$$= 2v(2) + \min \left\{ N\left(\frac{\phi(c, c)}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \cdot a\right), N\left(\frac{\phi(a, a)}{\phi(\bar{b}, \bar{b})} \cdot c\right) \right\} =: \Delta$$

$$\text{N\u00f6hre } N(c) \leq N(a) \Rightarrow N(\bar{b}) = N(c)$$

$$\Rightarrow \Delta = \min \{ N(a), 2N(a) - N(c) \} + 2v(2) = 2v(2) + N(a) \geq \mu + N(a)$$

nach Voraussetzung

$$\Rightarrow 2v(2) \geq \mu \quad \text{Widerspruch}$$

$$\text{Also ist } N(c) \geq N(a) \text{ und damit } N(\bar{b}) = N(a)$$

$$\Rightarrow \Delta = 2v(2) + \min \{ 2N(c) - N(a), N(c) \} = 2v(2) + N(c) \geq \mu + N(a)$$

$$\Rightarrow N\left(a - \frac{\phi(a, a)}{\phi(b, b)} \cdot b\right) = N(c) \geq \mu + N(a) - 2v(2)$$

$$\Leftarrow " : \text{ Sei wieder } \lambda := \frac{\phi(a, a)}{\phi(a, b)} \text{ und } \bar{b} := \lambda b$$

$$\Rightarrow \phi(a, \bar{b}, a) = 0, \text{ also } c := a + \bar{b} \perp a$$

$$\Rightarrow N(\bar{b}) = N(a + \bar{b} - a) = \min \{ N(a + \bar{b}), N(a) \} = N(a), \text{ da nach Voraus-} \\ \text{setzung } N(a + \bar{b}) \geq \mu + N(a) - 2v(2) > N(a)$$

$$\text{Sei: } T := \Omega_a \circ \Omega_{\bar{b}} \in V_{\mu}$$

$$T \text{ stetig} \Rightarrow \mathcal{K}(T-1) \text{ abgeschlossen, also } E = \mathcal{K}(T-1) \oplus \mathcal{K}(T-1)^{\perp}$$

$$\text{Sei } \Delta_x := N(Tx - x) - N(x) \text{ f\u00fcr } x \in E. \text{ Es m\u00fcssigt zu zeigen}$$

$$\Delta_x \geq \mu \quad \forall x \in \mathcal{K}(T-1)^{\perp}$$

$$\text{denn Sei } x = u + v \in E \text{ mit } u \in \mathcal{K}(T-1), v \in \mathcal{K}(T-1)^{\perp}$$

$$\Delta_x = N(Tu + Tv - u - v) - N(x) = N(Tv - v) - \min \{ N(u), N(v) \}$$

$$1. \text{ Fall: } N(u) \leq N(v) \Rightarrow \Delta_x = N(Tv - v) - N(u) \geq N(Tv - v) - N(v) = \Delta_v$$

$$2. \text{ Fall: } N(u) > N(v) \Rightarrow \Delta_x = N(Tv - v) - N(v) = \Delta_v$$

$$\text{F\u00fcr } T = \Omega_a \circ \Omega_{\bar{b}} \text{ ist aber } a^{\perp} \cap \bar{b}^{\perp} \subset \mathcal{K}(T-1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}(T-1)^{\perp} \subset (a^{\perp} \cap \bar{b}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(a, \bar{b})^{\perp} = \mathcal{L}(a, \bar{b})$$

Es genügt also zu zeigen: $\Delta\alpha, \Delta c \geq \delta$, also:

Sei $x = \lambda\alpha + \mu c \in L(a, b) = L(a, c)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta x &= N(\lambda Ta + \mu Tc - \lambda\alpha - \mu c) = \min \{ N(\lambda\alpha), N(\mu c) \} \\ &\geq \min \{ N(\lambda Ta - \lambda\alpha), N(\mu Tc - \mu c) \} = \min \{ N(\lambda\alpha), N(\mu c) \} \\ &\geq \min \{ \delta + N(\lambda\alpha), \delta + N(\mu c) \} = \min \{ N(\lambda\alpha), N(\mu c) \} \end{aligned}$$

1. Fall: $N(\lambda\alpha) \geq N(\mu c)$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \min \{ \delta + N(\lambda\alpha), \delta + N(\mu c) \} - N(\mu c) = \delta$$

2. Fall: $N(\lambda\alpha) < N(\mu c)$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \min \{ \delta + N(\lambda\alpha), \delta + N(\mu c) \} - N(\lambda\alpha) = \delta$$

Berechne also $\Delta\alpha, \Delta c$

$$\Delta c = N(\Omega_{\bar{b}}(c) - \Omega_a(c)) - N(c) = N\left(c - \frac{2\Phi(\bar{b}, c)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} \bar{b} - c\right) - N(c)$$

$$= 2v(2) + 2N(c) - N(\bar{b}) - N(c) = 2v(2) + N(c) - N(\alpha) \geq \delta \quad \text{nach Voraussetzung}$$

$$\Delta\alpha = N(\Omega_{\bar{b}}(a) - \Omega_a(a)) - N(\alpha) = N\left(\alpha - \frac{2\Phi(\bar{b}, a)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} \bar{b} + \alpha\right) - N(\alpha)$$

$$= N\left(2 \frac{\Phi(\bar{b}, \bar{b}) + \Phi(\bar{b}, a)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} \alpha - 2 \frac{\Phi(\bar{b}, a)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} c\right) - N(\alpha)$$

$$= 2v(2) + \min \left\{ N\left(\frac{\Phi(c, c)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} \alpha\right), N\left(\frac{\Phi(a, a)}{\Phi(\bar{b}, \bar{b})} c\right) \right\} - N(\alpha)$$

$$2N(c) - 2N(\bar{b}) + N(\alpha) = 2N(c) - N(\alpha) > N(c) \quad \text{nach Voraussetzung}$$

$$2N(a) - 2N(\bar{b}) + N(c) = N(c)$$

$$\Rightarrow \Delta\alpha = 2v(2) + N(c) - N(\alpha) \geq \delta$$

Beweis von (4):

Zu zeigen: $\forall \delta \in \Gamma^+ \exists \delta \in \Gamma^+$ so, dass $V_\delta \subseteq V_\delta$

Sei $\delta \in \Gamma^+$. Wähle $\bar{\delta} > \max\{2v(2), \delta\}$ und $\alpha \neq 0$ in E . Sei $c \neq 0$ aus $\alpha^\perp$ und $N(c) \geq \bar{\delta} + N(\alpha) - 2v(2)$ (dieses δ ist erreichbar)

Sei $b := -a + c$. Dann ist $\Omega_a \circ \Omega_b \in V_f$ nach Lemma 27
 $\Rightarrow \Omega_a \circ \Omega_b \in V_f$ und $\Omega_a \circ \Omega_b + 1$

Potthaus und Viotto zeigen in [12], dass für den vollen Hilbertraum $H = \{(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty\}$ gilt $\mathcal{O}$ ist zusammenhängend. Im Gegensatz dazu gilt hier

(5) $\mathcal{O} \neq \{1\} \Rightarrow \mathcal{O}$ ist total unzusammenhängend

Beweis: gilt in jeder lineartopologischen Gruppe

(6) Sei Γ eine geschlichte Untergruppe eines Hilbertprodukts $\prod_{\sigma \in I} H_{R_\sigma}$, $L_c = L_s$, also $k \neq 2$ und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine maximale orthogonale Familie in E mit

- $\exists$ höchstens ein $i \in \mathbb{N}$ mit $N(e_i) \equiv 0 \pmod{2\Gamma}$
- Mit σ_{i*} als linksen Index ν mit $2\Gamma(N(e_i))_\nu$ in R_ν ist $\sigma_{i*} \neq \sigma_{j*}$ für $i \neq j$

Dann ist $\mathcal{O}$ nicht lokal kompakt

Beweis

Manist zu zeigen: (*) $\gamma \in \Gamma$ und $\gamma > 2\nu(2) \Rightarrow V_\gamma$ nicht kompakt
 denn: Annahme: 1 hat kompakte Umgebung U

$\Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma$ mit $\gamma > 2\nu(2)$ und $V_\gamma \subset U$

Da V_γ abgeschlossen in $\mathcal{O}$, ist also auch V_γ kompakt

Widerspruch

Konstruiere man zu $\delta > \gamma$ eine Folge $(\Omega_a \circ \Omega_{b_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\Omega_a \circ \Omega_{b_n} \in V_\gamma \forall n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\varphi: \{\Omega_a \circ \Omega_{b_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \rightarrow V_\delta / V_\delta$ als Einschränkung der kanonischen Surjektion injektiv wird und $\Omega_a \circ \Omega_{b_n} + \Omega_a \circ \Omega_{b_m}$ für $n \neq m$. Dann gilt nämlich $|V_\delta / V_\delta| = \infty$

Annahme V_f kompakt

$(T_\alpha V_S)_{T \in V_f}$ ist eine offene Überdeckung von V_f , also existiert $T_1, \dots, T_n \in V_f$ so, dass $\{T_1 \circ V_S, \dots, T_n \circ V_S\}$ eine offene Überdeckung von V_f ist

$$\Rightarrow |V_f/V_S| < \infty \quad \text{Dedupliziere}$$

Diese Forderung zum Beweis der nichttrivialen Kompaktheit wird in [4] für eine andere Situation angewendet

Es ist also noch obige Konstruktion durchzuführen:

Definiere $N(e_i) = (f \circ \sigma)_{\sigma \in I}$ obdA gilt

$$- N(e_i) \not\equiv 0 \pmod{2\Gamma} \Rightarrow \sigma_{i*} = \text{min supp}(N(e_i)) \text{ und } f_{\sigma_{i*}} > 0$$

$$- N(e_i) \equiv 0 \pmod{2\Gamma} \Rightarrow i = 1$$

$$- \sigma_{i+1*} < \sigma_{i*} \quad \forall i$$

Setze $\alpha := e_2$, $c_0 := e_{i_0}$, wo $N(e_{i_0}) > f + N(\alpha) - 2v(2)$, $i_0 \geq 2$

Wähle $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $v(\lambda_n) = (\lambda_\sigma^{(n)})_{\sigma \in I}$ wo $\lambda_\sigma^{(n)} = \begin{cases} n \cdot r, & \sigma = \sigma_{i_0*} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

wobei $r > 0$ in $R_{\sigma_{i_0*}}$ beliebig

Deshalb setzen $\lambda_0 := 1$, $c_n := \lambda_n e_{i_0} + e_{i_0+n}$ für $n \geq 1$

$$\Rightarrow N(c_n) = \text{min} \{ N(\lambda_n e_{i_0}), N(e_{i_0+n}) \} = N(\lambda_n e_{i_0}), \text{ da } \sigma_{i_0+n*} < \sigma_{i_0*} \\ \text{und } N(e_{i_0+n}) > 0$$

$$\Rightarrow N(c_n) > N(e_{i_0}) \geq f + N(\alpha) - 2v(2) (> N(\alpha)) \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\text{Also } N(c_n) > f + N(\alpha) - 2v(2) \quad \forall n \geq 0$$

$$N(c_{n+1}) = 2v(\lambda_{n+1}) + N(e_{i_0}) > 2v(\lambda_n) + N(e_{i_0}) = N(c_n) \quad \forall n \geq 0$$

Setze $b_n := -\alpha + c_n$, $n \geq 0$

$\Rightarrow$ für $n \neq m$ sind b_n, b_m linear unabhängig

$\Rightarrow (\Omega_\alpha \circ \Omega_{b_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind paarweise verschieden und $\Omega_\alpha \circ \Omega_{b_n} \in V_f$
 $\forall n \in \mathbb{N}_0$ nach Lemma 27

$$\text{Deshalb ist } N(b_n) = N(\alpha) \quad \forall n \geq 0 \quad \text{und} \quad 2v(\phi(b_n, b_m)) = 2v(\phi(\alpha, \alpha) + \phi(c_n, c_m))$$

$$= 2N(a), \text{ da } v(\phi(c_n, c_m)) \geq \delta + N(a) - 2v(2) > N(a) \quad \forall n, m \geq 0$$

$$\text{Also ist } v(\phi(b_n, b_m)) = N(a) \quad \forall n, m \geq 0$$

$$\text{Nächste: } \delta \geq N(e_{i_0+1}) - N(a) + 2v(2) \quad (\Rightarrow \delta > \delta^*)$$

$$\Rightarrow \delta + N(a) - 2v(2) > N(\pi_n e_{i_0}) = N(c_n) \quad \forall n \geq 0, \text{ da } \sigma_{i_0+1}^2 < \sigma_{i_0}^2 \text{ und } N(e_{i_0+1}) > 0$$

$$\text{Zeige: } \Omega_a \circ \Omega_{b_n} \circ V_\delta = \Omega_a \circ \Omega_{b_m} \circ V_\delta \quad \Rightarrow n=m$$

$$\text{Sei } m \neq n, \text{ ohne dA } m < n. \text{ Zeige: } \Omega_a \circ \Omega_{b_n} \circ V_\delta \neq \Omega_a \circ \Omega_{b_m} \circ V_\delta$$

$$\text{1. Fall: } b_m \perp b_n$$

$$\Rightarrow \Omega_{b_m} \circ \Omega_{b_n} \neq V_\delta, \text{ auch Lemma 27, also Behauptung richtig}$$

$$\text{2. Fall: } b_m \neq b_n$$

$$\text{Setze } x := b_m - \frac{\phi(b_m, b_m)}{\phi(b_m, b_n)} \cdot b_n. \text{ Zeige: } N(x) < \delta + N(b_m) - 2v(2)$$

$$(\text{daraus ist } \Omega_{b_m} \circ \Omega_{b_n} \neq V_\delta \text{ auch Lemma 27})$$

$$u := \frac{\phi(b_m, b_m) - \phi(b_m, b_n)}{\phi(b_m, b_n)} \cdot a, \quad v := c_m - \frac{\phi(b_m, b_m)}{\phi(b_m, b_n)} \cdot c_n$$

$$\Rightarrow x = u + v \quad \text{mit } u \perp v$$

$$N(u) = 2v(\phi(b_m, b_m - b_n)) - 2v(\phi(b_m, b_n)) + N(a)$$

$$= 2v(\phi(b_m, c_m - c_n)) - N(a) \geq N(a) + N(c_m - c_n) - N(a) = N(c_m), \text{ da } N(c_m) < N(c_n)$$

$$N\left(\frac{\phi(b_m, b_m)}{\phi(b_m, b_n)} \cdot c_n\right) = 2N(a) - 2N(a) + N(c_n) > N(c_m)$$

$$\Rightarrow N(v) = N(c_m)$$

$$\Rightarrow N(x) = \min\{N(u), N(v)\} = N(c_m) < \delta + N(a) - 2v(2)$$

Die Aussagen (1) - (6) sowie Lemma 25 zusammengenommen
geben den folgenden Satz

Satz 5 Mit dem System $(V_x)_{x \in E}$, so

$$V_x = \{T \in \mathcal{O} / N(Tx-x) \geq j + N(x) \quad \forall x \in E\}$$

als Umgebungsbasis von $\mathbb{1}$ wird $\mathcal{O}$ zu einer topologischen Gruppe mit folgenden Eigenschaften

i) $\forall j \in \Gamma$ ist V_j Normalteiler in $\mathcal{O}$

ii) wenn $E \geq 2$, dann $b \neq 2$ und $L_S = L_C$

$\rightarrow \forall j \in \Gamma_+ \exists \delta \in \Gamma_+$ so, dass $V_\delta \subset V_j$

iii) $\mathcal{O}$ ist hausdorffsch und, falls $\mathcal{O} \neq \{\mathbb{1}\}$, lokal zusammenhängend

iv) E vollständig $\rightarrow \mathcal{O}$ vollständig

v) Sei Γ eine geordnete Gruppe eines Modulprodukts

$\prod_{\sigma \in I} R_\sigma$, $L_C = L_S$, dann $b \neq 2$ und $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine maximal orthogonale Familie in E mit

- $\exists$ höchstens ein $i \in \mathbb{N}$ mit $N(e_i) = 0 \pmod{2\Gamma}$

- Mit σ_{i*} als kleinstem Index ν mit $2 \nmid (N(e_i))_\nu$

in R_ν ist $\sigma_{i*} + \sigma_{i*}^* \neq 0$

Dann ist $\mathcal{O}$ nicht lokalkompakt

Literatur

- [1] Bouché, N.: Formes sesquilineaires et formes quadratiques
A.S.I. 1272. Paris: Hermann 1959
- [2] Kleiwe, I.: The Hilbert Embedding Theorem: Analysis, Refinement, Proof. Lecture Notes, Vol. 848, Springer 1981, 278-290
- [3] Jon, H. and Kille, H.A. On the definition of Hilbert Space
manuscripta math. 23 (1977) 67-90.
- [4] Haurer, O.: On the structure of the orthogonal group
Math. Scand. 21 (1967) 219-232
- [5] Hitzbrach, F.: Einführung in die Funktionalanalysis
B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim 1971
- [6] Holland, S.: *-valuations and ordered *-fields
Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980) 219-243
- [7] Kille, H.A. Ein nicht-abelsche Hilbertraum
Math. Z. 172 (1980) 41-49
- [8] Köthe, G. Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum
Math. Ann. 105 (1931) 15-39.
- [9] Küng, U.M.: Nicht-abelsche Hilberträume über ternären
Körpern. Diplomarbeit Univ. Zürich 1980
- [10] Küng, E.: Über Cliffordalgebren als quadratische Räume
Ph.D. Thesis, Universität Zürich 1971
- [11] Postel, A. Quadratische Semiorientierungen und quadratische
Formen. Math. Z. 133 (1973) 319-342

- [12] Putman, C.R. und Dinkus, G.: The orthogonal group in Hilbert Space. *Ann. J. Math.* 74 (1952) 52-78
- [13] Ribenboim, P.: Théorie des valuations
Les Presses de l'Université de Montréal 1965
- [14] Sacchini, H.: Counterexamples to the algebraic closed
perfect theorem. Erscheint demnächst
- [15] van der Waerden, B.L.: Algebra II
Heidelberg Taschenrechner, Springer 1967
- [16] Van der Waerden, B.L.: Geometry of Algebraic Theory vol. I
van Abstract Princeton 1968

Lebenslauf

Aus 10. November 1951 wurde ich, Maria Johana Angela Fässler-Wilmsen in St. Gallen geboren.

Von 1968 bis 1972 besuchte ich das Seminar Roschach, wo ich den Hauptsportart warb. Anschliessend unterrichtete ich während drei Jahren an der Primarschule Josen SG und Urdorf ZH. Im Frühling 1975 begann ich mein Studium an der Universität Zürich. Ich besuchte Vorlesungen und Übungen bei folgenden Herren Professoren:

D. Hlaw, P. Jobard, H. Joss, K. Hänsig, P. Kall, G. Karrer, H.H. Keller, H. Keller, H. Schneider, H.R. Schwarz, H.H. Storrer, K. Stetzel, P. Tödtli, F. Tödtli, O. Dödtli.

Im Herbst 1979 erwarb ich das Diplom in Mathematik mit Nebenfächern Physik und Operations Research. Seit Mai 1979 bin ich Assistentin am Mathematischen Institut der Universität Zürich.

Diese Arbeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H. Joss. Ich möchte ihm an dieser Stelle herzlich danken für die vielen wertvollen Ratschläge und Anregungen.

